ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Лектор – академик РАН Е.И. Моисеев

3 курс, 5 семестр, I поток

Аудиофайлы: Z0000036, Z0000037

Введение

Функциональный анализ – анализ над функциями. Роль точек играют функции. Рассмотрим примеры постановок задач.

Пример 1. $\{r_k\}$ – фундаментальная последовательность рациональных чисел:

$$|r_k - r_n| \underset{k,\, n\to\infty}{\to} 0 .$$

Как известно, у этой последовательности существует предел (единственный), который, вообще говоря, не является рациональным числом.

Аналогичную задачу поставим для функций. Пусть $\{f_k(x)\},\ x\in[a,b]$ – последовательность функций, интегрируемых с квадратом по Риману (или даже непрерывных), и пусть

$$\int_a^b |\, f_k(x) - f_n(x)|^2\, dx \underset{k,\, n\to\infty}{\to} 0 .$$

Можно показать, что у такой последовательности существует предел, который, вообще говоря, не будет функцией, интегрируемой с квадратом по Риману (и тем более непрерывной). Операция предельного перехода становится замкнутой (т.е. не выводящей из рассматриваемого класса), если рассматривать интегрируемость по Лебегу.

В чем отличие интеграла Лебега от интеграла Римана? В интеграле Римана сегмент, на котором изменяется аргумент функции, разбивается на мелкие отрезки, затем на каждом таком отрезке берется точка, затем составляется интегральная сумма, состоящая из произведений значений функции в этих точках на длины соответствующих отрезков. В интеграле Лебега на отрезки разбивается сегмент, которому принадлежат значения функции: если $m \le f(x) \le M$, то интегральная сумма строится следующим образом: $m = y_0 < y_1 < \ldots < y_{m-1} < y_m = M$,

$$S = \sum_{k=1}^{m} y_k \mu(E_k),$$

где E_k – это множество всех точек, в которых выполняется неравенство $y_{k-1} < f(x) \le y_k$ (для E_1 – неравенство $y_0 \le f(x) \le y_1$), а $\mu(E_k)$ – мера (аналог понятия длины) множества E_k .

Здесь возникает несколько вопросов. Что такое мера множества? Какие множества будут измеримыми (т.е. имеющими меру)? Для каких функций будет существовать интеграл Лебега?

Пример 2. Пусть l_2 – пространство бесконечных последовательностей вещественных чисел $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots)$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < +\infty .$$

В нем определены скалярное произведение и норма:

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k , \ \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2} .$$

В этом пространстве существует базис:

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0, \dots), \ e_2 = (0, 1, \dots, 0, \dots), \ \dots , \ e_k = (0, 0, \dots, 1, \dots), \ \dots .$$

Можно рассматривать операторы, действующие в этом пространстве. Норма оператора определяется стандартным образом:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0, x \in l_2} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} .$$

Для конечномерной матрицы вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{M1} & \dots & a_{MN} & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

определим конечномерный оператор, действующий по правилу

$$y = Ax , \ y = (y_1, y_2, \dots, y_m, \dots), \ y_m = \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk} x_k \ \text{(сумма фактически конечная).}$$

Рассмотрим последовательность конечномерных операторов $\{A_n\}$. Пусть эта последовательность фундаментальна: $\|A_m - A_n\| \underset{m,\, n \to \infty}{\to} 0$. Существует ли предел у этой последовательности операторов? Если да, то какими свойствами он обладает? Оказывается, что у этой последовательности существует предел, который будет вполне непрерывным оператором, и можно утверждать, что любой вполне непрерывный оператор аппроксимируется некоторой последовательностью конечномерных операторов.

Пример 3. Какие свойства конечных матриц (рассматривавшихся ранее) сохраняются для бесконечномерного случая? Вообще говоря, немногие. Вспомним теорию Фредгольма. Рассмотрим уравнение $Ax - \lambda x = y$, где $\lambda \neq 0$, $y \in l_2$, A – вполне непрерывный оператор. Решение также ищем в пространстве l_2. Это уравнение однозначно разрешимо тогда и только тогда, когда однородное уравнение $Ax - \lambda x = 0$ имеет только тривиальное решение. Если же однородное уравнение имеет нетривиальные решения (λ – собственное значение), то исходное уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда правая часть ортогональна всем собственным элементам сопряженного оператора. Это похоже на конечномерный случай. Если же $\lambda = 0$, то возможны случаи, когда уравнение $Ax = y$ разрешимо лишь для всюду плотного подмножества правых частей из l_2: область значений $R(A)$ оператора A такова, что $\overline{R(A)} = l_2$, но $R(A) \neq l_2$. Такое значение λ называется точкой непрерывного спектра. Это новое понятие, отсутствующее в конечномерном случае. В бесконечномерном случае возникает также понятие остаточного спектра.

Литература: по теории меры –

А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа.

Аудиофайл: Z0000038

Задачник:

Т.А. Леонтьева, В.С. Панферов, В.С. Серов. Задачи по теории функций действительного переменного. Сборник задач.

Краткая программа семестра:

Теория меры

Интеграл Лебега

Метрические пространства

Банаховы пространства. Три фундаментальные теоремы

Гильбертовы пространства. Ортонормированные системы. Пространства Соболева

Спектральная теория вполне непрерывных операторов

Нелинейные операторы. Теорема Шаудера о неподвижной точке

Глава 1. Теория меры

§ 1. Кольцо, минимальное кольцо, полукольцо, структура минимального кольца

Будем рассматривать множества (например, множества точек на прямой, на плоскости) и семейства множеств. Пусть X – некоторая система множеств. Введем понятие кольца.

Определение. Непустое семейство K множеств из X называется кольцом, если для любых множеств $A, B \in K$ $A \cap B \in K$ и $A \Delta B \in K$.

Утверждение. В кольце K для любых множеств $A, B \in K$ $A \cup B \in K$ и $A \setminus B \in K$.

Доказательство. $A \cup B = (A \cap B) \Delta (A \Delta B)$, $A \setminus B = A \cap (A \Delta B)$.

Важнейшими понятиями будут также σ-кольцо (сигма-кольцо) и δ-кольцо (дельта-кольцо).

Определение. Кольцо K называется σ-кольцом, если для любого счетного набора множеств $A_1, A_2, \ldots \in K$ $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in K$.

Определение. Кольцо K называется δ-кольцом, если для любого счетного набора множеств $A_1, A_2, \ldots \in K$ $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in K$.

Определение. Кольцо K называется алгеброй, если $X \in K$.

Дополнение множества A – это множество $X \setminus A$.

Принцип двойственности: $X \setminus \bigcup_\alpha A_\alpha = \bigcap_\alpha (X \setminus A_\alpha)$, $X \setminus \bigcap_\alpha A_\alpha = \bigcup_\alpha (X \setminus A_\alpha)$.

Пусть S – некоторое семейство множеств.

Определение. Минимальным кольцом $K(S)$ называется кольцо K, которое содержится в любом кольце, содержащем S.

Утверждение. Минимальное кольцо существует.

Доказательство. Рассмотрим все кольца, содержащие S. Такие кольца существуют; примером может служить множество всех подмножеств S. Возьмем теперь пересечение всех таких колец. Легко видеть, что это и будет минимальное кольцо $K(S)$.

В общем случае, описание кольца может быть трудной задачей, поэтому мы рассмотрим понятие полукольца.

Определение. Непустое семейство множеств S из X называется полукольцом, если для любых множеств $A, B \in S$ $A \bigcap B \in S$ и $A \setminus B = \coprod_{k=1}^{n} A_k$ (объединение попарно непересекающихся множеств), где $A_1, A_2, \ldots, A_n \in S$.

Пример. Множество полусегментов $\{[a, b)\}$ вещественной прямой образует полукольцо (но не кольцо!).

Лемма. Пусть S – полукольцо, множества $A, B_1, B_2, \ldots, B_n \in S$, причем множества $B_1, B_2, \ldots, B_n$ попарно не пересекаются, тогда существует конечный набор попарно непересекающихся множеств $A_1, A_2, \ldots, A_m \in S$ таких, что $A \setminus \left(\coprod_{k=1}^{n} B_k\right) = \coprod_{i=1}^{m} A_i$.

Доказательство. По индукции. Пусть $n = 1$. Представим рассматриваемое множество в виде $A \setminus B_1 = A \setminus (A \bigcap B_1)$. В силу определения полукольца $A \bigcap B_1 \in S$, поэтому возможно представление $A \bigcap B_1 = \coprod_{i=1}^{m} A_i$, где все $A_i \in S$, откуда и следует утверждение.

Совершим теперь индуктивный переход. Пусть утверждение справедливо для n. Докажем его для $n+1$. Представим рассматриваемое множество в виде

$$A \setminus \left(\coprod_{k=1}^{n+1} B_k\right) = \left(A \setminus \left(\coprod_{k=1}^{n} B_k\right)\right) \setminus B_{n+1} = \left(\coprod_{i=1}^{m} A_i\right) \setminus B_{n+1} = \coprod_{i=1}^{m} (A_i \setminus B_{n+1}) = \coprod_{i=1}^{m} \left(\coprod_{j=1}^{k_i} C_{ij}\right),$$

где все $C_{ij} \in S$ (последнее разложение вытекает из предыдущего пункта), что и требовалось доказать.

<u>Аудиофайл: Z0000039</u>

Докажем теперь теорему о структуре минимального кольца, порожденного полукольцом.

Теорема. Пусть S – полукольцо, $K(S)$ – минимальное кольцо, порожденное S, тогда $K(S)$ состоит из элементов вида $\coprod_{k=1}^{n} A_k$, где $A_1, A_2, \dots, A_n \in S$.

Доказательство. Пусть $K(S)$ – совокупность всевозможных множеств вида $\coprod_{k=1}^{n} A_k$, где $A_1, A_2, \dots, A_n \in S$. Докажем, что $K(S)$ – минимальное кольцо над S.

Рассмотрим два множества указанного вида: $A = \coprod_{k=1}^{n} A_k$, $B = \coprod_{j=1}^{m} B_j$.

Сначала докажем, что $A \bigcup B \in K(S)$. Если $A \bigcap B = \varnothing$, то это очевидно. Если же $A \bigcap B \neq \varnothing$, то докажем, что $A \setminus B \in K(S)$. Для этого рассмотрим два случая:

а) частный случай: $A \in S$. Тогда в силу леммы $A \setminus B = A \setminus \left(\coprod_{j=1}^{m} B_j \right) = \coprod_{i=1}^{l} C_i$, где все $C_i \in S$. Стало быть, $A \setminus B \in K(S)$;

б) общий случай: A не обязательно принадлежит S. Но тогда $A \setminus B = \left(\coprod_{k=1}^{n} A_k \right) \setminus B = \coprod_{k=1}^{n} (A_k \setminus B) \in K(S)$ в силу пункта а).

Осталось заметить, что $A \bigcup B = B \coprod (A \setminus B) \in K(S)$.

Теперь докажем, что $A \Delta B \in K(S)$. В самом деле, $A \Delta B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A) \in K(S)$.

Теорема доказана.

§ 2. Общее определение меры

Определим меру на полукольце множеств. Пусть S – полукольцо.

Определение. Мерой множества $A \in S$ называется число $\mu(A)$, удовлетворяющее следующим требованиям:

1^0. $\mu(A) \geq 0$ (неотрицательность меры).

2^0. Если $A = \coprod_{k=1}^{n} A_k$, где $A_1, A_2, \dots, A_n \in S$, то $\mu(A) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$ (аддитивность меры).

<u>Аудиофайлы: Z0000040, Z0000041</u>

Определение. Мера называется σ-аддитивной (или счетно-аддитивной), если свойство 2^0 меры распространяется на счетные объединения попарно непересекающихся множеств; иными словами, для любого множества $A = \coprod_{k=1}^{\infty} A_k$, $A, A_1, A_2, \dots \in S$, должно выполняться равенство $\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.

Рассмотрим примеры мер.

Пример 1. $S = \{[a, b)\}$, $\mu([a, b)) = b - a$ (обычная длина). Аналогично – в многомерном случае.

Пример 2. $F(t)$ – неубывающая функция, заданная на вещественной прямой, $S = \{[a, b)\}$, $\mu_F([a, b)) = F(b) - F(a)$. Случай $F(t) = t$ отвечает примеру 1.

Замечание. Мы видим, что каждой неубывающей функции можно поставить в соответствие некоторую меру. Верно и обратное: каждая мера порождает неубывающую функцию. Например, в случае полуинтервалов вещественной оси определим функцию $F(t)$ следующим образом: $F(t)=\mu([0,t)), t>0$, $F(t)=-\mu([t,0)), t<0$, $F(0)=0$.

Пример 3. Мера, не являющаяся σ-аддитивной: $X=[-1,0)$, $F(x)=\operatorname{sgn} x$. Представим полуинтервал X в виде

$$[-1,0)=\coprod_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{n},-\frac{1}{n+1}\right).$$

Тогда

$$\mu_F([-1,0))=F(0)-F(-1)=1,$$

$$\mu_F\left(\left[-\frac{1}{n},-\frac{1}{n+1}\right)\right)=F\left(-\frac{1}{n+1}\right)-F\left(-\frac{1}{n}\right)=0,$$

$$\mu_F([-1,0))\neq\sum_{n=1}^{\infty}\mu_F\left(\left[-\frac{1}{n},-\frac{1}{n+1}\right)\right).$$

Докажем теперь следующее фундаментальное свойство меры.

Утверждение. Пусть S – полукольцо с мерой μ, $A,B\in S$, $B\subset A$, тогда $\mu(B)\leq\mu(A)$.

Доказательство. Так как $A=B\coprod(A\setminus B)$, $A\setminus B=\coprod_{i=1}^{m}A_i$, где $A_1,A_2,\ldots,A_m\in S$, то $\mu(A)=\mu(B)+\sum_{i=1}^{m}\mu(A_i)\geq\mu(B)$, что и требовалось доказать.

Дадим важное определение непрерывности меры. Обратите внимание, что теперь мы будем предполагать, что мера задана на кольце, а не на полукольце.

Определение. Мера μ, заданная на кольце K, называется непрерывной, если $\forall A_1\subset A_2\subset\ldots$, $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$, $A,A_1,A_2,\ldots\in K$

$$\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=\mu(A).$$

Теорема. Мера μ, заданная на кольце K, непрерывна $\Leftrightarrow$ она σ-аддитивна.

Доказательство. $\Rightarrow$: пусть мера μ непрерывна, $A=\coprod_{k=1}^{\infty}A_k$, где $A,A_1,A_2,\ldots\in K$, тогда положим $B_n=\coprod_{k=1}^{n}A_k$. В силу определения кольца $B_n\in K$, кроме того, очевидно, $B_1\subset B_2\subset\ldots$. и $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$. В силу непрерывности меры

$$\mu(A)=\lim_{n\to\infty}\mu(B_n)=\lim_{n\to\infty}\mu\left(\coprod_{k=1}^{n}A_k\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mu(A_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k).$$

$\Leftarrow$: пусть мера μ σ-аддитивна, $A_1\subset A_2\subset\ldots$, $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$, $A,A_1,A_2,\ldots\in K$. Положим $B_1=A_1$, $B_k=A_k\setminus A_{k-1}$, $k=2,3,\ldots$, тогда все $B_k\in K$ и $A=\coprod_{k=1}^{\infty}B_k$. В силу счетной аддитивности меры

$$\mu(A)=\mu\left(\coprod_{k=1}^{\infty} B_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(B_k)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mu(B_k)=\lim_{n\to\infty}\left(\mu(A_1)+\sum_{k=2}^{n}\left(\mu(A_k)-\mu(A_{k-1})\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n).$$

Теорема доказана.

Следствие. В силу принципа двойственности справедливо следующее утверждение: если мера μ, заданная на кольце K, непрерывна, то $\forall\, A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, $A=\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, $A, A_1, A_2, \ldots \in K$ $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(A_n)=\mu(A)$, причем верно и обратное.

Аудиофайл: Z0000042

§ 3. Продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо

Пусть S – полукольцо с мерой m, K – кольцо с мерой μ, $S \subset K$.

Определение. Мера μ называется продолжением меры m, если $\forall A\in S$ $\mu(A)=m(A)$.

Теорема. Если $K(S)$ – минимальное кольцо, порожденное полукольцом S с мерой m, то существует и притом единственное продолжение меры m на кольцо $K(S)$. Если мера m счетно-аддитивна, то и ее продолжение счетно-аддитивно.

Доказательство.

1) В силу доказанной ранее теоремы всякое множество $A\in K(S)$ представимо в виде $A=\coprod_{k=1}^{n} B_k$, где все $B_k \in S$. Так как μ – продолжение меры m, то $\mu(A)=\sum_{k=1}^{n}\mu(B_k)=\sum_{k=1}^{n}m(B_k)$. Однако множества B_k, участвующие в разложении множества A, определяются неоднозначно. Докажем, что $\mu(A)$ не зависит от выбора B_k. В самом деле, пусть также $A=\coprod_{j=1}^{m}\tilde{B}_j$, где все $\tilde{B}_j \in S$, тогда представим каждое B_k в виде $B_k=\coprod_{j=1}^{m}\left(B_k\cap\tilde{B}_j\right)$. Отсюда следует, что $\mu(A)=\sum_{k=1}^{n}m(B_k)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}m\left(B_k\cap\tilde{B}_j\right)$. С другой стороны, $\tilde{B}_j=\coprod_{k=1}^{n}\left(\tilde{B}_j\cap B_k\right)$, и $\mu(A)=\sum_{j=1}^{m}m\left(\tilde{B}_j\right)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}m\left(\tilde{B}_j\cap B_k\right)$, что и доказывает корректность продолжения меры.

Аудиофайл: Z0000043

2) Докажем, что μ – мера. Неотрицательность очевидна. Докажем аддитивность. Пусть $A=\coprod_{i=1}^{m}A_i$, где $A, A_1, A_2, \ldots, A_n \in K(S)$, тогда каждое множество A_i представимо в виде $A_i=\coprod_{j=1}^{n_i}B_{ij}$, где все $B_{ij}\in S$, так что $A=\coprod_{i=1}^{m}\coprod_{j=1}^{n_i}B_{ij}$, поэтому $\mu(A)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}m(B_{ij})=\sum_{i=1}^{m}\mu(A_i)$, что и доказывает аддитивность.

3) Проверим сигма-аддитивность меры μ (в предположении сигма-аддитивности меры m). Пусть $A=\coprod_{i=1}^{\infty}A_i$, где $A, A_1, A_2, \ldots \in K(S)$, тогда все эти множества представимы в

виде $A_i = \coprod_{j=1}^{n_i} B_{ij}$, где все $B_{ij} \in S$, $A = \coprod_{k=1}^{m} B'_k$, где все $B'_k \in S$. Далее, так как $B'_k \subset A$, то $B'_k = B'_k \cap A = B'_k \cap \left(\coprod_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \coprod_{i=1}^{\infty} (B'_k \cap A_i) = \coprod_{i=1}^{\infty} \left(B'_k \cap \coprod_{j=1}^{n_i} B_{ij}\right) = \coprod_{i=1}^{\infty} \coprod_{j=1}^{n_i} (B'_k \cap B_{ij})$, поэтому $m(B'_k) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_i} m(B'_k \cap B_{ij})$, $\mu(A) = \sum_{k=1}^{m} m(B'_k) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_i} m(B'_k \cap B_{ij})$. С другой стороны, $\mu(A_i) = \sum_{j=1}^{n_i} m(B_{ij}) = \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m} m(B_{ij} \cap B'_k)$, поэтому $\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$, что и доказывает сигма-аддитивность.

Теорема доказана.

§ 4. Свойства сигма-аддитивной меры

Теорема. Пусть K – кольцо с мерой μ, $A, A_1, A_2, \ldots \in K$, тогда

1) если $\coprod_{k=1}^{\infty} A_k \subset A$, то $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \le \mu(A)$ (заметим, что сигма-аддитивность меры μ здесь не предполагается);

2) если мера μ сигма-аддитивна и $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, то $\mu(A) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ (заметим, что если сигма-аддитивности нет, то это, вообще говоря, неверно).

Доказательство. 1) Так как $\coprod_{k=1}^{n} A_k \in K$ и $\coprod_{k=1}^{n} A_k \subset A$ для любого n, то $\mu\left(\coprod_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \le \mu(A)$; устремляя n к бесконечности, получаем требуемое неравенство.

2) Необходимость сигма-аддитивности меры вытекает из Примера 3 (см. выше). Итак, пусть мера сигма-аддитивна и $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Обозначим через $\tilde{A}_k = A \cap A_k$ и представим множество A в виде $A = A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k = \tilde{A}_1 \coprod \left(\tilde{A}_2 \setminus \tilde{A}_1\right) \coprod \left(\tilde{A}_3 \setminus \left(\tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_2\right)\right) \coprod \ldots$. В силу сигма-аддитивности меры

$$\mu(A) = \mu(\tilde{A}_1) + \mu(\tilde{A}_2 \setminus \tilde{A}_1) + \mu\left(\tilde{A}_3 \setminus \left(\tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_2\right)\right) + \ldots \le$$
$$\le \mu(\tilde{A}_1) + \mu(\tilde{A}_2) + \mu(\tilde{A}_3) + \ldots \le \mu(A_1) + \mu(A_2) + \mu(A_3) + \ldots ,$$

что и требовалось доказать. Теорема доказана.

Теорема. Длина сигма-аддитивна на $S = \{[a, b)\}$.

Доказательство. Пусть $[a, b) = \coprod_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k)$. Очевидно, требуется доказать, что $b - a = \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k)$. В силу предыдущей теоремы справедливо неравенство $b - a \le \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k)$. Докажем теперь, что $b - a \ge \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k)$. Зафиксируем произвольное (достаточно малое) $\varepsilon > 0$. Легко видеть, что $[a, b - \varepsilon] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(a_k - 2^{-k} \varepsilon, b_k\right)$. Эта система интервалов образует открытое покрытие отрезка, поэтому по лемме Гейне-Бореля из нее можно выбрать конечное подпокрытие: $[a, b - \varepsilon] \subset \bigcup_{i=1}^{m} \left(a_{k_i} - 2^{-k_i} \varepsilon, b_{k_i}\right)$. Но тогда

$$[a, b-\varepsilon) \subset [a, b-\varepsilon] \subset \bigcup_{i=1}^{m} \left(a_{k_i} - 2^{-k_i}\varepsilon, b_{k_i}\right) \subset \bigcup_{i=1}^{m} \left[a_{k_i} - 2^{-k_i}\varepsilon, b_{k_i}\right).$$

Следовательно, $m([a, b-\varepsilon)) \le \sum_{i=1}^{m} m\left(\left[a_{k_i} - 2^{-k_i}\varepsilon, b_{k_i}\right)\right) \le \sum_{k=1}^{\infty} m\left(\left[a_k - 2^{-k}\varepsilon, b_k\right)\right)$, т.е.

$b - a - \varepsilon \le \sum_{k=1}^{\infty} \left(b_k - a_k + 2^{-k}\varepsilon\right)$, или $b - a \le \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) + 2\varepsilon$, откуда в силу произвольности ε и вытекает требуемое неравенство. Теорема доказана.

§ 5. Мера Лебега

Пусть K – алгебра элементарных множеств с сигма-аддитивной мерой m, X – единица этой алгебры, $m(X) < \infty$.

Определение. Верхней мерой множества $A \subset X$ называется

$$\mu^*(A) = \inf_{\substack{B_k \in K: \\ A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k}} \sum_{k=1}^{\infty} m(B_k).$$

Теорема. Если $A \in K$, то $\mu^*(A) = m(A)$.

Доказательство. Пусть $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, $B_1, B_2, ... \in K$, тогда по доказанной ранее теореме $m(A) \le \sum_{k=1}^{\infty} m(B_k)$, откуда вытекает, что

$$m(A) \le \inf_{\substack{B_k \in K: \\ A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k}} \sum_{k=1}^{\infty} m(B_k) = \mu^*(A).$$

В обратную сторону: $A \subseteq A$, поэтому $\mu^*(A) \le m(A)$. Теорема доказана.

Определение. Множество $A \subset X$ называется измеримым по Лебегу, если

$$\mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) = m(X).$$

В этом случае его мерой Лебега считается его верхняя мера.

Замечание. Если A измеримо, то и $X \setminus A$ измеримо.

Определение. Нижней мерой множества $A \subset X$ называется $\mu_*(A) = m(X) - \mu^*(X \setminus A)$.

Замечание. Очевидно, множество измеримо тогда и только тогда, когда его верхняя и нижняя меры совпадают.

Теорема. Пусть $A, A_1, A_2, ... \subset X$, $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, тогда $\mu^*(A) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$.

Доказательство. В силу определения внешней меры $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists B_{kj} \in K: \; A_k \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{kj}$, $\sum_{j=1}^{\infty} m(B_{kj}) \le \mu^*(A_k) + 2^{-k}\varepsilon$. Так как $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{kj}$, то

$\mu^*(A) \le \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} m(B_{kj}) \le \sum_{k=1}^{\infty} \left(\mu^*(A_k) + 2^{-k}\varepsilon\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k) + \varepsilon$, откуда в силу произвольности ε и вытекает требуемое неравенство. Теорема доказана.

<u>Аудиофайл: Z0000044</u>

Следствие 1. $\mu_*(A) \le \mu^*(A)$.

Доказательство. Так как $X = A \coprod (X \setminus A)$, то $X \subseteq A \cup (X \setminus A)$, поэтому $m(X) = \mu^*(X) \le \mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A)$, откуда и следует, что $\mu_*(A) = m(X) - \mu^*(X \setminus A) \le \mu^*(A)$.

Следствие 2. $\mu_*(A) \ge 0$.

Легко вытекает из вложения $X \setminus A \subseteq X$.

Следствие 3. $\forall\, A, \widetilde{A} \subset X$ $\left|\mu^*(A) - \mu^*(\widetilde{A})\right| \le \mu^*(A \Delta \widetilde{A})$.

Легко вытекает из вложения $A \subset \widetilde{A} \cup (A \Delta \widetilde{A})$.

Замечание. С помощью понятия верхней меры можно ввести «расстояние» между множествами: $d(A, B) = \mu^*(A \Delta B)$. Легко видеть, что все аксиомы метрики выполняются (неравенство треугольника вытекает из вложения $A \Delta B = (A \Delta C) \cup (C \Delta B)$), за исключением того, что из $d(A, B) = 0$ не вытекает, вообще говоря, что $A = B$.

Лемма. Если $\mu^*(A) = 0$, то A измеримо по Лебегу и $\mu(A) = 0$.

Достаточно заметить, что $\mu_*(A) = 0$ в силу двойного неравенства $0 \le \mu_*(A) \le \mu^*(A)$.

Следствие. Если $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, $\mu^*(A_k) = 0$, то A измеримо по Лебегу и $\mu(A) = 0$.

Достаточно заметить, что $\mu^*(A) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$.

Следствие. Любое подмножество множества меры нуль измеримо и имеет меру нуль.

Достаточно заметить, что если $B \subset A$, то $\mu^*(B) \le \mu^*(A)$.

Определение. Мера называется полной, если любое подмножество множества меры нуль измеримо и имеет меру нуль.

Замечание. Мера Лебега – полная.

Пример. Если мера порождена длиной, то мера множества рациональных чисел любого отрезка (и даже всей вещественной прямой) равна нулю.

§ 6. Критерий измеримости по Лебегу

Теорема. Множество $A \subset X$ измеримо по Лебегу тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, B \in K$: $\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$.

Доказательство. Достаточность. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть $B \in K$ – такое множество, что $\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$. Тогда $\left|\mu^*(A) - \mu^*(B)\right| \le \mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$ и $\left|\mu^*(X \setminus A) - \mu^*(X \setminus B)\right| \le \mu^*((X \setminus A) \Delta (X \setminus B)) = \mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$. Так как $\mu^*(B) = m(B)$, $\mu^*(X \setminus B) = m(X \setminus B)$, то $\left|\mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) - m(X)\right| = \left|\mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) - (m(B) + m(X \setminus B))\right| < 2\varepsilon$, откуда в силу произвольности ε и вытекает измеримость множества A.

Необходимость. Пусть множество A измеримо по Лебегу. Зафиксируем произвольное

$\varepsilon > 0$. В силу измеримости A существуют такие множества $\tilde{B}_i \in K$, что $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{B}_i$, $\sum_{i=1}^{\infty} m(\tilde{B}_i) \le \mu^*(A) + \varepsilon/3$. Положим теперь $B_1 = \tilde{B}_1$, $B_2 = \tilde{B}_2 \setminus \tilde{B}_1$, $B_3 = \tilde{B}_3 \setminus (\tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2)$, …, тогда $A \subset \coprod_{i=1}^{\infty} B_i$ и $\sum_{i=1}^{\infty} m(B_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} m(\tilde{B}_i) \le \mu^*(A) + \varepsilon/3$. В силу сходимости ряда существует такой номер N, что $\sum_{i=N+1}^{\infty} m(B_i) < \varepsilon/3$.

Положим $B = \coprod_{i=1}^{N} B_i$ и докажем, что множество B – искомое. Представим симметрическую разность в виде $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ и оценим меру слагаемых.

а) $A \setminus B \subset \left(\coprod_{i=1}^{\infty} B_i\right) \setminus B = \coprod_{i=N+1}^{\infty} B_i$, поэтому $\mu^*(A \setminus B) \le \sum_{i=N+1}^{\infty} m(B_i) < \varepsilon/3$.

б) $B \setminus A = B \cap (X \setminus A)$, $X \setminus A$ измеримо в силу измеримости A. Следовательно, существуют такие множества $C_j \in K$, что $X \setminus A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j$, $\sum_{j=1}^{\infty} m(C_j) \le \mu^*(X \setminus A) + \varepsilon/3$.

Итак, $B \setminus A = B \cap (X \setminus A) \subset B \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j\right) \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} (B \cap C_j)$, поэтому

$$\mu^*(B \setminus A) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(B \cap C_j) = \sum_{j=1}^{\infty} m(B \cap C_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \left(m(C_j) - m(C_j \setminus B)\right) \le \mu^*(X \setminus A) + \varepsilon/3 - \sum_{j=1}^{\infty} m(C_j \setminus B).$$

Но $X = A \coprod (X \setminus A) \subset \left(\coprod_{i=1}^{\infty} B_i\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j\right) = \left(\coprod_{i=1}^{\infty} B_i\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (C_j \setminus B)\right)$, поэтому $m(X) = \mu^*(X) \le \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i) + \sum_{j=1}^{\infty} m(C_j \setminus B) \le \mu^*(A) + \varepsilon/3 + \sum_{j=1}^{\infty} m(C_j \setminus B)$, откуда следует, что $-\sum_{j=1}^{\infty} m(C_j \setminus B) \le \mu^*(A) + \varepsilon/3 - m(X)$ и $\mu^*(B \setminus A) \le \mu^*(X \setminus A) + \varepsilon/3 + \mu^*(A) + \varepsilon/3 - m(X) = 2\varepsilon/3$.

Стало быть, $\mu^*(A \Delta B) \le \mu^*(A \setminus B) + \mu^*(B \setminus A) < \varepsilon/3 + 2\varepsilon/3 = \varepsilon$. Теорема доказана.

<u>Аудиофайлы: Z0000045, Z0000046</u>

Следствие. Множество A измеримо по Лебегу, если для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество C: $\mu^*(A \Delta C) < \varepsilon$.

Достаточно заметить, что $A \Delta B = (A \Delta C) \cup (C \Delta B)$.

Теорема. Объединение, пересечение, разность и симметрическая разность измеримых множеств измеримы.

Доказательство. Пусть множества A_1, A_2 измеримы, $\varepsilon > 0$ – произвольное фиксированное число, тогда существуют множества $B_1, B_2 \in K$: $\mu^*(A_i \Delta B_i) < \varepsilon$, $i = 1, 2$.

Объединение: $B_1 \cup B_2 \in K$, $(A_1 \cup A_2) \Delta (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$, поэтому $\mu^*((A_1 \cup A_2) \Delta (B_1 \cup B_2)) \le \mu^*(A_1 \Delta B_1) + \mu^*(A_2 \Delta B_2) < 2\varepsilon$.

Пересечение: $A_1 \cap A_2 = X \setminus ((X \setminus A_1) \cup (X \setminus A_2))$, дополнение измеримо.

Разность: $A_1 \setminus A_2 = A_1 \cap (X \setminus A_2)$.

Симметрическая разность: $A_1 \Delta A_2 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1)$.

Теорема доказана.

Итак, измеримые множества образуют алгебру.

Теорема. μ^* – мера на измеримых по Лебегу множествах.

Доказательство. Достаточно доказать, что если множества A_1, A_2 измеримы, $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, то $\mu^*\left(A_1 \coprod A_2\right) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$. Легко видеть, что $\mu^*\left(A_1 \coprod A_2\right) \le \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$. Докажем неравенство в другую сторону. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу измеримости множеств A_1, A_2 существуют множества $B_1, B_2 \in K$: $\mu^*(A_i \Delta B_i) < \varepsilon$, $i = 1, 2$. Так как $A_i \subset B_i \cup (A_i \Delta B_i)$, то $\mu^*(A_i) \le \mu^*(B_i) + \mu^*(A_i \Delta B_i) < m(B_i) + \varepsilon$, откуда следует, что $\mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) < m(B_1) + m(B_2) + 2\varepsilon = m(B_1 \cup B_2) + m(B_1 \cap B_2) + 2\varepsilon$. Но $B_1 \cup B_2 \subset \left(A_1 \coprod A_2\right) \cup \left(\left(A_1 \coprod A_2\right) \Delta (B_1 \cup B_2)\right)$, поэтому $\mu^*(B_1 \cup B_2) \le \mu^*\left(A_1 \coprod A_2\right) + \mu^*\left(\left(A_1 \coprod A_2\right) \Delta (B_1 \cup B_2)\right) < \mu^*\left(A_1 \coprod A_2\right) + 2\varepsilon$ в силу включения $\left(A_1 \coprod A_2\right) \Delta (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$, а $B_1 \cap B_2 \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$ при $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ и любых B_1, B_2, поэтому $\mu^*(B_1 \cap B_2) < 2\varepsilon$. Таким образом, $\mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) < \mu^*\left(A_1 \coprod A_2\right) + 6\varepsilon$. В силу произвольности ε $\mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) \le \mu^*\left(A_1 \coprod A_2\right)$. Теорема доказана.

Следствие. μ^* – сигма-аддитивная мера на измеримых по Лебегу множествах.

Доказательство. Пусть $A = \coprod_{k=1}^{\infty} A_k$, $A, A_1, A_2, \ldots$ измеримы по Лебегу, тогда, с одной стороны, $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, поэтому $\mu^*(A) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$; с другой стороны, $\coprod_{k=1}^{\infty} A_k \subset A$, поэтому $\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k) \le \mu^*(A)$, откуда и следует равенство $\mu^*(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$.

Теорема. Счетное объединение измеримых множеств измеримо.

Доказательство. Пусть множества $A_1, A_2, \ldots$ измеримы, $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, тогда, как обычно, представим A в виде $A = A_1 \coprod (A_2 \setminus A_1) \coprod (A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)) \coprod \ldots = \coprod_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k$. Так как $A \subset X$, то $\mu^*\left(\coprod_{k=1}^{n} \tilde{A}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*\left(\tilde{A}_k\right) \le \mu^*(X) = m(X) < \infty$, откуда следует, что $\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*\left(\tilde{A}_k\right) \le m(X) < \infty$. Стало быть, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N$: $\sum_{k=N+1}^{\infty} \mu^*\left(\tilde{A}_k\right) < \varepsilon$. Рассмотрим множество $C = \coprod_{k=1}^{N} \tilde{A}_k$. Оно измеримо как конечное объединение измеримых множеств, причем $A \Delta C = \coprod_{k=N+1}^{\infty} \tilde{A}_k$, поэтому $\mu^*(A \Delta C) < \varepsilon$, откуда и следует измеримость A. Теорема доказана.

Следствие. Счетное пересечение измеримых множеств измеримо.

Достаточно заметить, что $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = X \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (X \setminus A_k)\right)$.

Следствие. Измеримые по Лебегу множества образуют сигма-алгебру.

§ 7. Случай $m(X) = \infty$

Определение. Мера μ называется сигма-конечной, если $\exists\, X_i \in K$: $\mu(X_i) < \infty$, $i = 1, 2, \dots$, $X = \coprod_{i=1}^{\infty} X_i$.

Определение. Множество A называется измеримым по Лебегу, если измеримы все множества $A \cap X_i$, $i = 1, 2, \dots$, при этом мерой множества A называется число $\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A \cap X_i)$ (сумма может быть и бесконечной).

Замечание. Однозначность представления X через X_i не требуется: если $X = \coprod_{j=1}^{\infty} X'_j$, то $X_i = \coprod_{j=1}^{\infty} (X_i \cap X'_j)$, $X'_j = \coprod_{i=1}^{\infty} (X_i \cap X'_j)$, далее очевидно.

§ 8. Измеримые множества на вещественной прямой. Канторово множество. Борелевские множества. Многомерный случай. Мера Жордана. Пример неизмеримого множества

Измеримые множества. Пусть $X = \mathrm{R}$, мера – обычная мера Лебега на прямой, первоначально заданная на полусегментах $\{[a, b)\}$. Следующие множества измеримы:

интервал: $(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + 1/n, b)$;

точка: $\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a, a + 1/n)$;

сегмент: $[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a, b + 1/n)$ или как дополнение к интервалу;

любое открытое множество – поскольку оно представимо в виде не более чем счетного объединения попарно непересекающихся интервалов. Докажем это: пусть G – открытое множество, тогда $\forall\, x \in G$ $\exists (\alpha, \beta) \subset G$: $x \in (\alpha, \beta)$. Пусть теперь

$$a = \inf_{x \in (\alpha, \beta) \subset G} \alpha, \; b = \sup_{x \in (\alpha, \beta) \subset G} \alpha,$$

тогда легко видеть, что $(a, b) \subset G$, множество таких интервалов не более чем счетно и в объединении дает все множество G.

Канторово множество. Из отрезка $[0, 1]$ удалим интервал $(1/3, 2/3)$, из оставшегося множества – интервалы $(1/9, 2/9)$ и $(7/9, 8/9)$, и т.д. В итоге получится множество, не содержащее ни одного интервала. Оно замкнуто, так как его дополнение открыто, имеет меру нуль, так как дополнение к нему имеет меру единица $(1/3 + 2/9 + 4/27 + \dots = 1)$, и имеет мощность континуума, так как входящие в него числа в троичной системе – это всевозможные бесконечные дроби, состоящие из нулей и двоек.

Аудиофайлы: Z0000047-Z0000049

Борелевские множества.

Определение. Борелевскими называются множества, получающиеся в результате счетного объединения или пересечения открытых множеств.

Заметим, что мощность всех борелевских множеств на прямой – континуум (это следует из того, что всякое открытое множество представимо в виде объединения попарно непересекающихся интервалов). Кроме того, борелевские множества измеримы по Лебегу (мера Бореля на этих множествах по определению равна мере Лебега) и образуют сигма-алгебру (мера Бореля счетно-аддитивна).

Утверждение. Борелевская мера неполна.

Докажем от противного. Допустим, что мера Бореля полна. Рассмотрим канторово множество K. Очевидно, оно борелевское. Рассмотрим множество всех его подмножеств 2^K. По определению полной меры любое множество $A \in 2^K$ должно быть измеримо по Борелю и иметь меру Бореля нуль. Стало быть, мощность всех борелевских множеств не меньше мощности множества 2^K, а это гиперконтинуум – противоречие. Значит, существуют неборелевские множества.

Теорема. Любое измеримое множество можно заключить в борелевское множество той же меры.

Доказательство. Пусть A – измеримое множество. В силу измеримости для любого натурального n существует борелевское множество C_n такое, что $A \subset C_n$ и $\mu(C_n) \leq \mu(A) + 1/n$. Положим теперь $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$, тогда C – искомое. Теорема доказана.

Многомерный случай. Рассмотрим теперь случай R^m.

Теорема. Любое открытое множество $G \subset \mathrm{R}^m$ измеримо по Лебегу.

Доказательство. Накроем все пространство R^m сеткой с шагом 1. Среди кубиков сетки оставим только те, которые целиком содержатся в множестве G. Обозначим их Δ_i^0. Затем уменьшим вдвое шаг сетки и добавим к имеющимся кубикам новые, обозначив их Δ_i^1, и т.д. Легко видеть, что для таких кубиков $\coprod_{n=0}^{\infty} \coprod_{i=1}^{\infty} \Delta_i^n \subset G$, но справедливо и обратное включение $\coprod_{n=0}^{\infty} \coprod_{i=1}^{\infty} \Delta_i^n \supset G$, откуда следует равенство. Теорема доказана.

Мера Жордана. Считаем $m(X) < \infty$. Верхняя мера Жордана множества A определяется следующим образом:

$$\mu_J^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup_{k=1}^{N} B_k} \sum_{k=1}^{N} m(B_k).$$

Таким образом, если в мере Лебега рассматриваются счетные накрытия, то в мере Жордана – лишь конечные накрытия.

Нижняя мера Жордана: $\mu_{*J}(A)=m(X)-\mu_J^*(A)$.

Легко видеть, что $\mu_{*J}(A)\le\mu_{*L}(A)\le\mu_L^*(A)\le\mu_J^*(A)$.

Определение. Множество A называется измеримым по Жордану, если $\mu_{*J}(A)=\mu_J^*(A)$.

Очевидно, если множество измеримо по Жордану, то оно измеримо и по Лебегу и их меры равны. Обратное неверно: множество рациональных точек отрезка $[0,1]$ имеет лебегову меру нуль, но неизмеримо по Жордану.

Пример неизмеримого по Лебегу множества. Опираемся на аксиому выбора. Рассмотрим отрезок $[0,1]$. Для каждого $x\in[0,1]$ определим класс $K_x=\{y\in[0,1]\,|\,y-x\in\mathrm{Q}\}$. Легко видеть, что любые два таких класса либо не пересекаются, либо совпадают. Таким образом, весь отрезок $[0,1]$ разбивается на попарно непересекающиеся классы. Возьмем теперь по одному представителю из каждого класса. Построенное множество неизмеримо, поскольку отрезок $[0,1]$ есть счетное объединение таких множеств, эти множества попарно не пересекаются и конгруэнтны.

Аудиофайл: Z0000050

§ 9. Мера Лебега-Стилтьеса

Обобщая понятие меры Лебега на случай произвольной неубывающей функции (см. пример 2 в § 2), приходим к понятию меры Лебега-Стилтьеса.

Рассматриваем одномерный случай.

Пусть $F(t)$ – неубывающая функция, заданная на вещественной прямой, $S=\{[a,b)\}$ – полукольцо полуинтервалов вещественной прямой. Определим меру полуинтервала: $m_F([a,b))=F(b)-F(a)$.

Теорема. Мера m_F сигма-аддитивна на S $\Leftrightarrow$ функция $F(t)$ непрерывна слева.

Замечание. Если задать меру на других полуинтервалах: $m_F((a,b])=F(b)-F(a)$, то $F(t)$ будет непрерывна справа.

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть мера m_F сигма-аддитивна, $b_k\uparrow b$, тогда $\forall\ k$ $[a,b_k)\subset[a,b_{k+1})$. Так как мера m_F сигма-аддитивна, то она непрерывна, поэтому $m_F\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}[a,b_k)\right)=\lim\limits_{k\to\infty}m_F([a,b_k))=\lim\limits_{k\to\infty}(F(b_k)-F(a))$. Но $\bigcup_{k=1}^{\infty}[a,b_k)=[a,b)$, откуда и следует, что $\lim\limits_{k\to\infty}(F(b_k)-F(a))=m_F([a,b))=F(b)-F(a)$. В силу монотонности функции $F(t)$ отсюда следует, что $F(b-0)=F(b)$.

$\Leftarrow$ Пусть функция $F(t)$ непрерывна слева, $[a,b)=\coprod_{k=1}^{\infty}[a_k,b_k)$. Считая, что $\coprod_{k=1}^{\infty}[a_k,b_k)\subset[a,b)$, в силу свойств меры получаем неравенство

$\sum_{k=1}^{\infty} m_F([a_k, b_k)) \le m_F([a, b))$, откуда следует, что $\sum_{k=1}^{\infty}(F(b_k) - F(a_k)) \le F(b) - F(a)$.

Докажем теперь противоположное неравенство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности слева функции $F(t)$ существуют такие $\delta, \delta_k > 0$, что $F(b) - F(b-\delta) < \varepsilon/2$ и $F(a_k) - F(a_k - \delta_k) < \varepsilon/2^{k+1}$.

Рассмотрим сегмент $[a, b-\delta]$. Интервалы $\{(a_k - \delta_k, b_k)\}_{k=1}^{\infty}$, очевидно, образуют его открытое покрытие, поэтому по лемме Гейне-Бореля из них можно выделить конечное подпокрытие: $[a, b-\delta] \subset \bigcup_{k=1}^{N}(a_k - \delta_k, b_k)$. Но тогда и $[a, b-\delta) \subset \bigcup_{k=1}^{N}[a_k - \delta_k, b_k)$, откуда следует, что $m_F([a, b-\delta)) \le \sum_{k=1}^{N} m_F([a_k - \delta_k, b_k))$, т.е.

$F(b-\delta) - F(a) \le \sum_{k=1}^{N}(F(b_k) - F(a_k - \delta_k)) \le \sum_{k=1}^{\infty}(F(b_k) - F(a_k - \delta_k))$,

$F(b) - F(a) \le \sum_{k=1}^{\infty}(F(b_k) - F(a_k)) + \varepsilon$, откуда в силу произвольности ε и вытекает требуемое неравенство. Теорема доказана.

Сравнение мер. Абсолютная непрерывность одной меры относительно другой. При построении меры разные функции порождают, вообще говоря, разные наборы измеримых множеств. Однако у них будет общая часть – борелевские множества: из равенства $(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty}[a + 1/n, b)$ вытекает измеримость интервала, а значит, и любого открытого множества, а значит, и борелевских множеств.

Обратим внимание еще на одну особенность. В случае обычной меры Лебега мера точки равна нулю. В случае меры Лебега-Стилтьеса это уже необязательно: например, если

$$F(t) = \begin{cases} 1, t > 0, \\ 0, t \le 0, \end{cases}$$

то $\mu_F(\{0\}) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_F([0, 1/n)) = \lim\limits_{n\to\infty}(F(1/n) - F(0)) = 1$, т.е. мера точки равна единице.

Определение. Пусть сигма-аддитивные меры μ и ν заданы на общей сигма-алгебре Σ. Мера ν называется абсолютно непрерывной относительно меры μ, если из $\mu(A) = 0$ вытекает $\nu(A) = 0$ для любого множества $A \in \Sigma$.

Теорема. Пусть сигма-аддитивные меры μ и ν заданы на общей сигма-алгебре Σ, тогда мера ν абсолютно непрерывна относительно меры μ $\Leftrightarrow$ $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$: если $\mu(A) < \delta$, то $\nu(A) < \varepsilon$ для любого множества $A \in \Sigma$.

Доказательство. $\Leftarrow$ Рассмотрим произвольное множество $A \in \Sigma$, для которого $\mu(A) = 0$. Так как $\mu(A) < \delta$ для любого $\delta > 0$, то $\nu(A) < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$, а стало быть, $\nu(A) = 0$.

$\Rightarrow$ От противного: пусть $\exists\, \varepsilon > 0$: $\forall\, n$ $\exists\, A_n \in \Sigma$: $\mu(A_n) < 2^{-n}$, но $\nu(A_n) \ge \varepsilon$. Положим $\tilde{A}_m = \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n$, тогда $\tilde{A}_m \in \Sigma$, $\tilde{A}_{m+1} \subset \tilde{A}_m$ и $\mu(\tilde{A}_m) \le \sum_{n=m}^{\infty} \mu(A_n) < 2^{1-m} \underset{m\to\infty}{\to} 0$. Положим теперь

$B=\bigcap_{m=1}^{\infty}\tilde{A}_m$, $B\in\Sigma$. В силу сигма-аддитивности мер $\mu(B)=\lim\limits_{m\to\infty}\mu(\tilde{A}_m)=0$, $\nu(B)=\lim\limits_{m\to\infty}\nu(\tilde{A}_m)$. Но из $A_m\subset\tilde{A}_m$ следует $\varepsilon\le\nu(A_m)\le\nu(\tilde{A}_m)$, поэтому и $\nu(B)\ge\varepsilon$, т.е. $\nu(B)\ne 0$. Теорема доказана.

«Канторова лестница».

Определение. Функция $F(t)$, $t\in\mathrm{R}$, называется абсолютно непрерывной, если для $\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,\delta>0$: для любого конечного набора попарно непересекающихся интервалов (a_k,b_k), $k=\overline{1,N}$, таких что $\sum_{k=1}^{N}(b_k-a_k)<\delta$, выполняется неравенство $\sum_{k=1}^{N}|F(b_k)-F(a_k)|<\varepsilon$.

Замечание. Легко видеть, что из абсолютной непрерывности вытекает непрерывность (и даже равномерная непрерывность).

Теорема. Пусть мера μ порождена длиной, а мера ν_F порождена неубывающей непрерывной слева функцией $F(t)$, тогда мера ν_F абсолютно непрерывна относительно меры μ $\Leftrightarrow$ $F(t)$ – абсолютно непрерывная функция.

Доказательство. $\Rightarrow$Пусть мера ν_F абсолютно непрерывна относительно меры μ, тогда $\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,\delta>0$: $\mu(A)<\delta\ \Rightarrow\ \nu_F(A)<\varepsilon$. Возьмем в качестве множества A произвольный конечный набор попарно непересекающихся полуинтервалов $[a_k,b_k)$, $k=\overline{1,N}$, суммарной длины меньше δ, тогда $\nu_F(A)=\sum_{k=1}^{N}(F(b_k)-F(a_k))<\varepsilon$.

$\Leftarrow$ Пусть $F(t)$ – абсолютно непрерывная функция, $\mu(A)=0$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon>0$ и выберем $\delta>0$ так, что если $\sum_{k=1}^{N}(b_k-a_k)<\delta$, где интервалы (a_k,b_k), $k=\overline{1,N}$, попарно не пересекаются, то $\sum_{k=1}^{N}(F(b_k)-F(a_k))<\varepsilon$. Так как $\mu^*(A)=0$, то можно считать, что множество A накрыто счетной системой попарно непересекающихся полуинтервалов $[a_k,b_k)$ суммарной длиной меньше δ; но тогда и $\sum_{k=1}^{N}(b_k-a_k)<\delta$ для любого N. В силу абсолютной непрерывности функции $F(t)$ $\sum_{k=1}^{N}(F(b_k)-F(a_k))<\varepsilon$, следовательно, $\sum_{k=1}^{\infty}(F(b_k)-F(a_k))\le\varepsilon$, а это и означает, что $\nu_F^*(A)\le\varepsilon$. Теорема доказана.

Пример функции непрерывной, но не абсолютно непрерывной («лестница Кантора»). Построим последовательность непрерывных монотонно неубывающих функций $\{F_n(t)\}$, $t\in[0,1]$, по следующим правилам: $F_n(0)=0$, $F_n(1)=1$ для всех n; $F_1(t)=1/2$, $t\in(1/3,\,2/3)$, и линейна на оставшейся части отрезка $[0,1]$; $F_2(t)=F_1(t)$, $t\in(1/3,\,2/3)$, $F_2(t)=1/4$, $t\in(1/9,\,2/9)$, $F_2(t)=3/4$, $t\in(7/9,\,8/9)$, и линейна на оставшейся части отрезка $[0,1]$; и т.д. Эта последовательность равномерно сходится, ее предел – непрерывная, но не абсолютно непрерывная функция.

Аудиофайлы: Z0000051, Z0000052

Взаимно сингулярные меры.

Определение. Две сигма-аддитивные меры μ и ν, заданные на общей сигма-алгебре Σ, называются взаимно сингулярными, если $\exists\, A \in \Sigma$: $\mu(A) = \nu(X \setminus A) = 0$.

Пример 1. Пусть $A = K$ (канторово множество), мера μ – обычная мера Лебега на прямой, тогда $\mu(K) = 0$, $\nu_F([0,1] \setminus K) = 0$ (см. выше). Меры μ и ν_F взаимно сингулярны.

Пример 2. Пусть

$$F(t) = \begin{cases} 0, -1 \le t \le 0, \\ 1, 0 < t \le 1, \end{cases}$$

$A = \{0\}$, мера μ – обычная мера Лебега на прямой, тогда $\mu(A) = 0$ (длина точки равна нулю), $\nu_F([-1,1] \setminus A) = 0$. Меры μ и ν_F взаимно сингулярны.

Глава 2. Измеримые функции

§ 1. Определение и свойства измеримых функций

Понятие измеримой функции. Пусть задан триплет $\{X, \Sigma, \mu\}$, где X – пространство, Σ – сигма-алгебра, μ – сигма-аддитивная мера.

Определение. Функция $f(x)$, $x \in X$, называется измеримой, если для любого вещественного c множество $\{x \in X \mid f(x) < c\} \in \Sigma$.

Замечание. В дальнейшем такие множества обозначаем просто $\{f < c\}$.

Теорема. Следующие четыре утверждения эквивалентны:

1) $\forall\, c$ измеримо $\{f < c\}$;

2) $\forall\, c$ измеримо $\{f \le c\}$;

3) $\forall\, c$ измеримо $\{f > c\}$;

4) $\forall\, c$ измеримо $\{f \ge c\}$.

Доказательство. Достаточно заметить, что

$$\{f \le c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ f < c + \frac{1}{n} \right\};\ \{f > c\} = X \setminus \{f \le c\};\ \{f \ge c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ f > c - \frac{1}{n} \right\};\ \{f < c\} = X \setminus \{f \ge c\}.$$

Пример. Непрерывная функция, заданная на вещественной прямой, измерима. Достаточно доказать, что множество $\{f < c\}$ открыто. Пусть $x_0 \in \{f < c\}$, тогда $f(x_0) < c$. В силу непрерывности существует открытый шар положительного радиуса с центром в точке x_0, лежащий в $\{f < c\}$, что и требовалось доказать.

Арифметические операции над измеримыми функциями.

Лемма 1. Если $f(x)$ измерима, то $f(x) + C$ измерима.

Очевидно.

Лемма 2. Если $f(x)$ измерима, то $Cf(x)$ измерима.

Очевидно.

Лемма 3. Если $f(x)$ и $g(x)$ измеримы, то $\{f < g\}$ измеримо.

Доказательство. Пусть $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ – множество всех рациональных чисел, тогда

$$\{f < g\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\{f < r_k\} \cap \{r_k < g\}).$$

Теорема. Сумма и разность измеримых функций измеримы.

Доказательство. Разность: $\{f - g < c\} = \{f < g + c\}$ и леммы 1 и 3. Сумма: $f + g = f - (-g)$ и лемма 2.

Следствие. Линейная комбинация измеримых функций измерима.

Лемма 4. Если $f(x)$ измерима, то $|f(x)|$ измерима.

Доказательство. $\{|f| < c\} = \{f < c\} \cap \{f > -c\}$ при $c > 0$ и $\{|f| < c\} = \varnothing$ при $c \le 0$.

Замечание. Обратное неверно: $f(x) = 1$, $x \in E$, $f(x) = -1$, $x \in X \setminus E$, E неизмеримо.

Лемма 5. Если $f(x)$ измерима, то $f^2(x)$ измерима.

Доказательство. $\{f^2 < c\} = \{|f| < \sqrt{c}\}$ при $c > 0$ и $\{f^2 < c\} = \varnothing$ при $c \le 0$.

Теорема. Произведение измеримых функций измеримо.

Доказательство. $fg = ((f + g)^2 - (f - g)^2)/4$ и леммы 4 и 5.

Теорема. Частное измеримых функций, если знаменатель не обращается в нуль, измеримо.

Доказательство. Достаточно доказать измеримость $1/g$, но это вытекает из соотношения

$$\{1/g < c\} = \begin{cases} c = 0 : \{g < 0\}, \\ c > 0 : \{g < 0\} \cup \{g > 1/c\}, \\ c < 0 : \{g < 0\} \cap \{g > 1/c\}. \end{cases}$$

Замечание. Если $g(x)$ обращается в нуль на множестве E меры нуль, то $1/g(x)$ измерима на $X \setminus E$. Если ее доопределить на E, то функция будет измеримой на X (мера предполагается полной).

Определение. Если какое-либо свойство выполнено всюду, за исключением множества меры нуль, то говорят, что это свойство выполнено почти всюду (п.в.).

Определение. Функции называются эквивалентными, если они совпадают п.в.

Теорема. Функция, эквивалентная измеримой, измерима.

Доказательство. Пусть $f(x)$ измерима, $E = \{f \ne g\}$, $\mu(E) = 0$, тогда $X = E \coprod (X \setminus E)$, $\{g < c\} = (\{g < c\} \cap E) \coprod (\{g < c\} \cap (X \setminus E)) = (\{g < c\} \cap E) \coprod (\{f < c\} \cap (X \setminus E))$, первое имеет меру нуль, второе измеримо.

Предел последовательности измеримых функций.

Теорема. Если последовательность состоит из измеримых функций и сходится, то ее предел – измеримая функция.

Доказательство. Пусть $f_k(x),\ k=1,2,\dots$, измеримы и $f_k(x)\to f(x),\ x\in X$, тогда утверждение теоремы вытекает из соотношения

$$\{f\ge c\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{k=m}^{\infty}\left\{f_k\ge c-\frac{1}{n}\right\}.$$

Докажем его. Пусть $x\in\{f\ge c\}$, тогда $\forall\ n\ \ \exists\, m=m(n):\ \forall\ k\ge m\ \ f_k(x)\ge c-1/n$.

Следовательно, $x\in\bigcap_{k=m}^{\infty}\{f_k\ge c-1/n\}\ \Rightarrow\ x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{k=m}^{\infty}\{f_k\ge c-1/n\}$.

Обратно, пусть $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{k=m}^{\infty}\{f_k\ge c-1/n\}$, тогда $\forall\ n\ \ x\in\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{k=m}^{\infty}\{f_k\ge c-1/n\}$ $\Rightarrow\ \exists\, m=m(n):\ x\in\bigcap_{k=m}^{\infty}\{f_k\ge c-1/n\}$. Следовательно, $f_k(x)\ge c-1/n\ \ \forall\ k\ge m$. Переходим к пределу: $f(x)\ge c-1/n$. В силу произвольности n $f(x)\ge c$. Теорема доказана.

Следствие. Если последовательность состоит из измеримых функций и сходится п.в., то ее предел – измеримая функция.

<u>Аудиофайл: Z0000053</u>

Теорема. Пусть $f_k(x),\ k=1,2,\dots$, измеримы, тогда $\max\{f_1(x),\dots,f_n(x)\}$, $\min\{f_1(x),\dots,f_n(x)\}$, $\overline{f}(x)=\sup\limits_{k\ge1} f_k(x)$, $\underline{f}(x)=\inf\limits_{k\ge1} f_k(x)$ измеримы.

Легко видеть, что $\{\overline{f}\le c\}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\{f_k\le c\}$, что и доказывает теорему для $\overline{f}(x)$, остальное – аналогично.

Теорема. Пусть $f_k(x),\ k=1,2,\dots$, измеримы и $\overline{\lim}\, f_k$, $\underline{\lim}\, f_k$ п.в. конечны, тогда они измеримы.

Доказательство. Не ограничивая общности, считаем, что $\overline{\lim}\, f_k$, $\underline{\lim}\, f_k$ всюду конечны, тогда утверждение теоремы вытекает из соотношения $\underline{\lim}\, f_k=\lim\limits_{n\to\infty}\inf\limits_{k\ge n} f_k$.

Теорема. Если функция измерима и дифференцируема, то ее производная измерима.

Достаточно заметить, что $f'(x)=\lim\limits_{n\to\infty} n\big(f(x+1/n)-f(x)\big)$.

Замечание. Всякую ли разрывную функцию можно представить в виде (поточечного) предела последовательности непрерывных функций? Нет: такой предел был бы измеримой функцией, но существуют неизмеримые функции.

§ 2. Сходимость по мере

Дополнительно предполагаем, что $\mu(X)<\infty$.

Определение. Говорят, что последовательность измеримых функций $\{f_k(x)\}$ сходится по мере к измеримой функции $f(x)$, если $\forall\, \varepsilon > 0$ $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(\{|f_k - f| \ge \varepsilon\}) = 0$.

Обозначение. $f_k \xrightarrow{\mu} f$.

Замечание. Множества меры нуль не влияют на сходимость по мере.

Теорема. Если у последовательности существуют два предела по мере, то они эквивалентны.

Доказательство. Пусть f и $\tilde{f}$ – пределы по мере последовательности $\{f_k(x)\}$. Зафиксируем $\forall\, \varepsilon > 0$. Если $\left|f - \tilde{f}\right| \ge \varepsilon$, то в силу оценки $\left|f - \tilde{f}\right| \le |f - f_k| + \left|f_k - \tilde{f}\right|$ справедливо хотя бы одно из неравенств $|f - f_k| \ge \varepsilon/2$, $\left|f_k - \tilde{f}\right| \ge \varepsilon/2$, откуда следует, что $\left\{\left|f - \tilde{f}\right| \ge \varepsilon\right\} \subset \{|f - f_k| \ge \varepsilon/2\} \cup \left\{\left|f_k - \tilde{f}\right| \ge \varepsilon/2\right\}$. Значит, $\mu\left(\left\{\left|f - \tilde{f}\right| \ge \varepsilon\right\}\right) \le \mu(\{|f - f_k| \ge \varepsilon/2\}) + \mu\left(\left\{\left|f_k - \tilde{f}\right| \ge \varepsilon/2\right\}\right)$. Переходя к пределу, получим, что $\mu\left(\left\{\left|f - \tilde{f}\right| \ge \varepsilon\right\}\right) = 0$, откуда в силу произвольности ε и соотношения $\left\{\left|f - \tilde{f}\right| > 0\right\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{\left|f - \tilde{f}\right| \ge 1/n\right\}$ вытекает, что $f = \tilde{f}$ п.в.. Теорема доказана.

Теорема. Из сходимости п.в. вытекает сходимость по мере.

Доказательство. Пусть $f_k \to f$ всюду на множестве X. Зафиксируем $\forall\, \varepsilon > 0$. Обозначим $E_k = \{|f_k - f| \ge \varepsilon\}$, $R_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$ (заметим, что $R_{n+1} \subset R_n$), $R = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n$. Легко видеть, что $R = \varnothing$, откуда следует, что $\mu(R_n) \to 0 \;\Rightarrow\; \mu(E_k) \to 0$.

Пусть теперь $f_k \to f$ п.в., $E = \{f_k \not\to f\}$, тогда $\mu(E) = 0$. На множестве $X \setminus E$ $f_k \to f$ всюду, а значит, f_k сходится к f и по мере на $X \setminus E$, а значит, и на X. Теорема доказана.

Замечание. Обратное неверно: из сходимости по мере, вообще говоря, не вытекает сходимость даже и в одной точке: $X = [0,1]$,

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1/2, \\ 0, & \text{иначе}; \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} 1, & 1/2 \le x \le 1, \\ 0, & \text{иначе}; \end{cases} \quad f_3(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1/4, \\ 0, & \text{иначе}; \end{cases} \quad f_4(x) = \begin{cases} 1, & 1/4 \le x \le 1/2, \\ 0, & \text{иначе}; \end{cases} \quad \ldots$$

Теорема. Из последовательности измеримых функций, сходящейся по мере к измеримой функции, можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся п.в. к этой функции.

Доказательство. Пусть $\mu(\{|f_n - f| \ge \varepsilon\}) \to 0$, тогда выберем подпоследовательность так, чтобы $\mu(E_k) \le 2^{-k}$, где $E_k = \left\{\left|f_{n_k} - f\right| \ge 1/k\right\}$. Обозначим $R_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$ (заметим, что $R_{n+1} \subset R_n$), $R = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n$. Очевидно, $\mu(R_n) \le 2^{1-n} \to 0$, и в силу непрерывности меры $\mu(R) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(R_n) = 0$. Покажем, что $f_{n_k} \to f$ на $X \setminus R$. Пусть $x \in X \setminus R$, тогда $x \notin R_n$ при некотором $n \Rightarrow x \notin E_k$, $k \geq n$. Следовательно, $\left|f_{n_k}(x) - f(x)\right| < 1/k$, $k \geq n$. Устремляя k к бесконечности, получаем, что $f_{n_k}(x) \to f(x)$. Теорема доказана.

Аудиофайлы: Z0000054, Z0000055

Теорема Егорова. Пусть $f_n \to f$ п.в. на X, все функции f_n, f измеримы, $\mu(X) < \infty$, тогда $\forall\, \delta > 0 \;\; \exists\, X_\delta \subset X$: $\mu(X \setminus X_\delta) < \delta$, $f_n \underset{n\to}{\overset{\to}{}} f$ на X_δ.

Доказательство. Сначала предположим, что $f_n \to f$ всюду на X. Положим $X_{n,m} = \left\{\left|f_k - f\right| \leq 1/m \;\forall\, k \geq n\right\}$. Ясно, что $X_{n,m} \subset X_{n+1,m}$ и $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_{n,m} = X$, так что $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(X_{n,m}) = \mu(X) \;\; \forall\, m$.

Зафиксируем $\forall\, \delta > 0$. Выберем подпоследовательность $\left\{X_{n_m,m}\right\}$: $\mu\left(X \setminus X_{n_m,m}\right) \leq 2^{-m}\delta$. Очевидно, $\sum_{m=1}^{\infty} \mu\left(X \setminus X_{n_m,m}\right) \leq \delta$. Положим $X_\delta = \bigcap_{m=1}^{\infty} X_{n_m,m}$, тогда $X \setminus X_\delta = \bigcup_{m=1}^{\infty}\left(X \setminus X_{n_m,m}\right)$. Легко видеть, что $f_n \underset{n\to}{\overset{\to}{}} f$ на X_δ.

Пусть теперь $f_n \to f$ п.в. на X, тогда проведем рассуждения предыдущего пункта на множестве $\tilde{X} = X \setminus E$, где $E = \left\{f_k \not\to f\right\}$, $\mu(E) = 0$. Очевидно, $\mu(X \setminus X_\delta) = \mu\left(\tilde{X} \setminus X_\delta\right) < \delta$. Теорема доказана.

Глава 3. Интеграл Лебега

§ 1. Определение интеграла Лебега

Пусть задан триплет $\{X, \Sigma, \mu\}$, где X – пространство, Σ – сигма-алгебра, μ – полная сигма-аддитивная мера, причем $\mu(X) < +\infty$.

Определим интеграл Лебега на простых функциях.

Определение. Функция называется простой, если она измерима и принимает конечное число значений.

Простую функцию можно представить в виде $f(x) = \sum_{k=1}^{m} f_k \chi_{A_k}(x)$, где $X = \coprod_{k=1}^{m} A_k$, все множества $A_k \in \Sigma$ (и попарно не пересекаются), $f_k \in \mathrm{R}$,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases}$$

– характеристическая функция (индикатор). Фактически, сумма всегда состоит из одного слагаемого. Примером может служить функция Дирихле.

Определение. Интегралом Лебега от простой функции $f(x) = \sum_{k=1}^{m} f_k \chi_{A_k}(x)$ называется

$$(L)\int_X f(x)d\mu = \sum_{k=1}^{m} f_k \mu(A_k).$$

В дальнейшем значок (L) опускаем.

Пример. Интеграл Лебега от функции Дирихле по мере Лебега равен мере множества. Напомним, что по Риману эта функция не интегрируема.

Свойства интеграла Лебега от простых функций:

1. Константу можно выносить за знак интеграла.

2. Интеграл от суммы (разности) функций равен сумме (разности) интегралов от этих функций. Доказательство очевидное.

Следствие. Интеграл от линейной комбинации функций равен линейной комбинации интегралов от этих функций с теми же коэффициентами.

3. $\left|\int_X f(x)d\mu\right| \le \max_X |f(x)|\mu(X) = \max_{k=\overline{1,m}} |f_k|\mu(X).$

Расширим теперь понятие интеграла Лебега путем предельного перехода.

Лемма. Пусть $\{f_n(x)\}$ – последовательность простых функций, $f_n(x) \rightrightarrows$ на X, тогда числовая последовательность $\int_X f_n(x)d\mu$ сходится.

Вытекает из фундаментальности этой последовательности: если $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, то

$$\left|\int_X f_n(x)d\mu - \int_X f_m(x)d\mu\right| \le \int_X |f_n(x) - f_m(x)|d\mu \le \max_X |f_n(x) - f_m(x)|\mu(X) \le \varepsilon\mu(X).$$

Определение. Пусть $f(x)$ – равномерный предел на X последовательности простых функций $\{f_n(x)\}$, тогда интегралом Лебега от этой функции называется

$$(L)\int_X f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)d\mu.$$

Легко видеть, что это определение корректно: предел не зависит от выбора последовательности простых функций.

Каков класс таких функций? Легко видеть, что это измеримые (поскольку предел последовательности измеримых функций измерим) и ограниченные (поскольку равномерный предел ограниченных функций ограничен) функции. Оказывается, что это в точности этот класс, как показывают следующие утверждения.

Лемма. Для любой измеримой ограниченной функции существует равномерно сходящаяся к ней последовательность простых функций.

Доказательство. Пусть $f(x)$ – измеримая ограниченная функция. Представим ее в виде разности двух неотрицательных функций: $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$, где $f_\pm(x) = (|f(x)| \pm f(x))/2$. Таким образом, не ограничивая общности, можно считать, что $0 \le f(x) \le M$. Положим $A_{k\,n} = \{k/n \le f(x) < (k+1)/n\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$,

$f_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(k/n)\mu(A_{k\,n})=\sum_{k=0}^{N}(k/n)\mu(A_{k\,n}),\ N=[Mn]+1$, тогда $0\le f(x)-f_n(x)\le 1/n$ $\forall\, x\in A_{k\,n} \Rightarrow \forall\, x\in X$, что и требовалось доказать.

Замечание. Если функция не ограничена, то существует равномерно сходящаяся к ней последовательность простых функций, принимающих счетное число значений.

Из этой леммы вытекает основное утверждение.

Теорема. Любая измеримая ограниченная функция интегрируема по Лебегу, причем интеграл может быть найден как предел последовательности лебеговых интегральных сумм:

$$\int\limits_X f(x)d\mu=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{N}\frac{k}{n}\mu\left(\left\{\frac{k}{n}\le f(x)<\frac{k+1}{n}\right\}\right).$$

<u>Аудиофайлы: Z0000056, Z0000057</u>

§ 2. Интеграл Лебега от неограниченной функции

Рассмотрим измеримую простую функцию, принимающую счетное число значений: $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k\chi_{A_k}(x)$, где $X=\coprod_{k=1}^{\infty}A_k$ (множества $A_k\in\Sigma$ и попарно не пересекаются).

Определение. Простая функция $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k\chi_{A_k}(x)$ называется интегрируемой по Лебегу, если сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f_k|\mu(A_k);$$

в этом случае интегралом Лебега от этой функции называется

$$(L)\int\limits_X f(x)d\mu=\sum_{k=1}^{\infty}f_k\mu(A_k).$$

Таким образом, в случае интеграла Лебега абсолютная интегрируемость равносильна интегрируемости.

Свойства интеграла Лебега от простых функций со счетным числом значений:

1. Константу можно выносить за знак интеграла.

2. Интеграл от суммы (разности) функций равен сумме (разности) интегралов от этих функций. Доказательство очевидное.

Следствие. Интеграл от линейной комбинации функций равен линейной комбинации интегралов от этих функций с теми же коэффициентами.

Пример. Функция Дирихле интегрируема по обычной мере Лебега на отрезке $[0,1]$, и интеграл от нее равен единице.

3. $\left|\int\limits_X f(x)d\mu\right|\le\sup\limits_X|f(x)|\mu(X)$ (если $f(x)$ не ограничена, то правая часть бесконечна).

4. Если $|f(x)|\le g(x)$ и $g(x)$ интегрируема, то $f(x)$ интегрируема, причем

$$\left|\int_X f(x)d\mu\right| \le \int_X g(x)d\mu .$$

Доказательство. Пусть $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k \chi_{A_k}(x),\ g(x)=\sum_{i=1}^{\infty} g_i \chi_{B_i}(x)$, тогда

$$\left|\int_X f(x)d\mu\right| \le \sum_{k=1}^{\infty}|f_k|\mu(A_k)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|f_k|\mu(A_k\cap B_i)\le \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} g_i\mu(A_k\cap B_i)=\sum_{i=1}^{\infty} g_i\mu(B_i)=\int_X g(x)d\mu .$$

Лемма. Пусть $\{f_n(x)\}$ – последовательность простых функций со счетным числом значений, $f_n(x)\rightrightarrows$ на X, тогда числовая последовательность $\int_X f_n(x)d\mu$ сходится.

Вытекает из оценки

$$\left|\int_X f_n(x)d\mu-\int_X f_m(x)d\mu\right| \le \sup_X |f_n(x)-f_m(x)|\mu(X).$$

Определение. Функция $f(x),\ x\in X$, называется интегрируемой по Лебегу на множестве X, если существует последовательность интегрируемых простых функций со счетным числом значений $\{f_n(x)\}$, равномерно сходящаяся к $f(x)$ на множестве X, при этом интегралом Лебега от функции $f(x)$ называется

$$(L)\int_X f(x)d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)d\mu .$$

Корректность этого определения вытекает из следующего простого утверждения.

Лемма. Если $\{f_n(x)\}$ и $\{\tilde f_n(x)\}$ – две последовательности интегрируемых простых функций со счетным числом значений, равномерно сходящиеся к функции $f(x)$ на множестве X, то

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_X \tilde f_n(x)d\mu .$$

Для доказательства достаточно заметить, что

$$\left|\int_X f_n(x)d\mu-\int_X \tilde f_n(x)d\mu\right| \le \sup_X\left|f_n(x)-\tilde f_n(x)\right|\mu(X)\le\left(\sup_X|f_n(x)-f(x)|+\sup_X\left|f(x)-\tilde f_n(x)\right|\right)\mu(X)\to 0 .$$

Справедливо и обратное (в некотором смысле) утверждение.

Лемма. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на множестве X и пусть последовательность измеримых простых функций со счетным числом значений $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится к функции $f(x)$ на множестве X, тогда, начиная с некоторого номера, все функции $f_n(x)$ интегрируемы на множестве X.

Доказательство. Так как функция $f(x)$ интегрируема, то существует последовательность интегрируемых простых функций со счетным числом значений $\{\tilde f_n(x)\}$, которая равномерно сходится к функции $f(x)$. Следовательно, $\forall\, \varepsilon>0\ \exists\, N:\ \forall\, n\ge N$

$\left|\tilde{f}_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon$ и (в силу равномерной сходимости) $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Отсюда вытекает, что $\left|\tilde{f}_n(x) - f_n(x)\right| < 2\varepsilon$ и $|f_n(x)| < \left|\tilde{f}_n(x)\right| + 2\varepsilon$, а это и означает интегрируемость $f_n(x)$. Лемма доказана.

Свойства интегрируемых функций:

1. Константу можно выносить за знак интеграла.

2. Интеграл от суммы (разности) функций равен сумме (разности) интегралов от этих функций.

3. Если $f(x) \geq 0$ п.в., то $\int_X f(x)d\mu \geq 0$.

4. Если $f(x) \leq g(x)$ п.в., то $\int_X f(x)d\mu \leq \int_X g(x)d\mu$.

5. Если $f(x)$ интегрируема, то $|f(x)|$ интегрируема. Обратное, вообще говоря, неверно.

6. Если $f(x)$ измерима, $g(x)$ интегрируема и $|f(x)| \leq g(x)$, то $f(x)$ интегрируема, причем $\left|\int_X f(x)d\mu\right| \leq \int_X |f(x)|d\mu \leq \int_X g(x)d\mu$.

<u>Аудиофайл: Z0000058</u>

7. Если $f(x)$ интегрируема, $g(x)$ измерима и ограничена, то $f(x)g(x)$ интегрируема.

Определение. Пусть $f(x)$ интегрируема на X, измеримое $A \subset X$, тогда

$$\int_A f(x)d\mu = \int_X f(x)\chi_A(x)d\mu.$$

8 (аддитивность интеграла Лебега по множеству интегрирования). Если $f(x)$ интегрируема на X, $X = A \coprod B$, A, B – измеримые, то

$$\int_X fd\mu = \int_A fd\mu + \int_B fd\mu.$$

Следствие. Если $f(x)$ интегрируема на X, $X = \coprod_{k=1}^n A_k$, все A_k – измеримые, то

$$\int_X fd\mu = \sum_{k=1}^n \int_{A_k} fd\mu.$$

В дальнейшем мы докажем и свойство сигма-аддитивности.

9. Если f измерима, $\mu(A) = 0$, то $\int_A fd\mu = 0$.

Доказательство. Для простой функции это свойство очевидно. В общем случае существует последовательность простых функций $f_n \rightrightarrows f$, поэтому $\exists\, n: |f| \leq |f_n| + 1$, откуда вытекает, что функция f интегрируема и

$$\int_A |f|d\mu \leq \int_A (|f_n| + 1)d\mu = 0.$$

Следствие. Если $f=0$ п.в. на множестве X, то $\int_X f d\mu = 0$.

Достаточно заметить, в обозначении $E=\{f\neq 0\}$, что $\mu(E)=0$, $\int_E f d\mu = 0$, $\int_{X\setminus E} f d\mu = 0$, $X = E\coprod (X\setminus E)$.

10. Если f интегрируема на X, $f\geq 0$, $\int_X f d\mu = 0$, то $f=0$ п.в. на X.

Доказательство. Сначала докажем неравенство Чебышёва: если $f\geq 0$, то $\forall\ a>0$

$$\mu(\{f\geq a\})\leq \frac{1}{a}\int_X f d\mu .$$

В самом деле,

$$\int_X f d\mu = \int_{\{f\geq a\}} f d\mu + \int_{\{f<a\}} f d\mu \geq \int_{\{f\geq a\}} f d\mu \geq a \int_{\{f\geq a\}} f d\mu = a\mu(\{f\geq a\}).$$

Теперь заметим, что $\{f>0\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{f\geq 1/n\}$. В силу неравенства Чебышёва $\mu(\{f\geq 1/n\})\leq \int_X f d\mu / n = 0$, поэтому $\mu(\{f>0\})\leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu(\{f\geq 1/n\}) = 0$.

§ 3. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега

Теорема (абсолютная непрерывность интеграла Лебега). Пусть $f(x)$ интегрируема на X, тогда $\forall\ \varepsilon>0\ \ \exists\,\delta>0:\ \forall\ A\subset X$, $A\in\Sigma$, $\mu(A)<\delta$

$$\left|\int_A f(x) d\mu\right| < \varepsilon .$$

Доказательство. Зафиксируем $\forall\ \varepsilon>0$. Сначала докажем утверждение теоремы для простой функции: $X=\coprod_{k=1}^{\infty} A_k$ (все A_k – измеримые), $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k \chi_{A_k}(x)$. В силу интегрируемости $f(x)$ $\exists\, N:\ \sum_{k=N+1}^{\infty}|f_k|\mu(A_k)<\varepsilon/2$. Далее, $\forall\ A\in\Sigma$

$$\left|\int_A f(x) d\mu\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k \mu(A\cap A_k)\right| < \sum_{k=1}^{N}|f_k|\mu(A\cap A_k)+\frac{\varepsilon}{2}\leq \max_{1\leq k\leq N}|f_k|\mu(A)+\frac{\varepsilon}{2},$$

и осталось положить $\delta=\varepsilon/\left(2\max\limits_{1\leq k\leq N}|f_k|\right)$.

В общем случае, в силу равномерной сходимости существует простая функция $g(x)$: $|f(x)-g(x)|<\varepsilon/(2\mu(X))$, $x\in X$, поэтому

$$\left|\int_A f d\mu\right| \leq \int_A |f-g| d\mu + \left|\int_A g d\mu\right| < \frac{\varepsilon}{2\mu(X)}\mu(A)+\frac{\varepsilon}{2}\leq\varepsilon .$$

Теорема доказана.

Теорема (сигма-аддитивность интеграла Лебега). Если $f(x)$ интегрируема на X, $X=\coprod_{k=1}^{\infty}A_k$, все $A_k\in\Sigma$, то

$$\int\limits_X fd\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_k} fd\mu .$$

Доказательство. Зафиксируем $\forall\, \varepsilon > 0$. Выберем $\delta > 0$ по предыдущей теореме. Представим X в виде $X = \coprod_{k=1}^{N} A_k \coprod R_N$, где $R_N = \coprod_{k=N+1}^{\infty} A_k$, $\mu(R_N) = \sum_{k=N+1}^{\infty} \mu(A_k) < \delta$. В силу предыдущей теоремы

$$\left| \int\limits_X fd\mu - \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{A_k} fd\mu \right| = \left| \int\limits_{R_N} fd\mu \right| < \varepsilon ,$$

что и требовалось доказать.

Справедливо и обратное утверждение.

Теорема. Если $f(x)$ задана на X, $X = \coprod_{k=1}^{\infty} A_k$, все $A_k \in \Sigma$, $f(x)$ интегрируема на каждом A_k и $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} |f| d\mu < +\infty$, то $f(x)$ интегрируема на X.

Доказательство. Сначала докажем для простой функции. Пусть $f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j \chi_{B_j}(x)$, $X = \coprod_{j=1}^{\infty} B_j$, все $B_j \in \Sigma$, тогда

$$\int\limits_{A_k} f(x) d\mu = \int\limits_X f(x) \chi(A_k) d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} f_j \mu\left(A_k \cap B_j\right).$$

Так как $f(x)$ интегрируема на A_k, то $\sum_{j=1}^{\infty} |f_j| \mu\left(A_k \cap B_j\right) < +\infty$ и

$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |f_j| \mu\left(A_k \cap B_j\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} |f| d\mu < +\infty$, следовательно,

$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |f_j| \mu\left(A_k \cap B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} |f_j| \mu\left(B_j\right) < +\infty$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь общий случай. Существует простая функция $g(x)$: $|f(x) - g(x)| < 1$. В силу оценки $|f(x)| < |g(x)| + 1$ достаточно доказать интегрируемость $g(x)$. Так как $|g(x)| \le |f(x)| + 1$, то $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} |g| d\mu \le \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} |f| d\mu + \mu(X) < +\infty$. Теорема доказана.

Аудиофайл: Z0000059

§ 4. Предельный переход под знаком интеграла Лебега

Теорема. Пусть $f_n \rightrightarrows f$ и каждая f_n интегрируема на X, тогда f интегрируема на X и

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_X f_n d\mu = \int\limits_X fd\mu .$$

Доказательство. Так как все f_n измеримы, то f измерима. Так как $|f_n - f| \le \varepsilon$ начиная с некоторого номера, то f интегрируема в силу оценки $|f| \le |f_n| + \varepsilon$ и

$$\left|\int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu\right| \le \int_X |f_n - f| d\mu \le \varepsilon\mu(X).$$

Теорема доказана.

Замечание. Если равномерной сходимости нет, то переходить к пределу под знаком интеграла, вообще говоря, нельзя, как показывает следующий пример.

Пример*. $X = [0,1]$, $f_n(x) = \begin{cases} 0, \ x = 0, \\ n, \ 0 < x < 1/n, \\ 0, \ 1/n \le x \le 1. \end{cases}$ $f_n(x) \to 0$, $\int_X f_n(x)dx = 1$.

Теорема Лебега (о предельном переходе под знаком интеграла). Пусть $f_n \xrightarrow{\mu} f$ (сходится по мере), каждая f_n измерима на X и существует интегрируемая $F(x)$ такая, что $|f_n(x)| \le F(x)$ $\forall\, n \in \mathrm{N}$ п.в. на X, тогда все f_n и f интегрируемы на X и

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Доказательство. Интегрируемость f_n вытекает из ее измеримости и оценки $|f_n| \le F$. Далее, из сходимости по мере вытекает, что существует подпоследовательность $f_{n_k} \to f$ п.в. на X, откуда следует измеримость f. Переходя в неравенстве $|f_{n_k}| \le F$ к пределу, получаем оценку $|f| \le F$, из которой следует интегрируемость f.

Оценим разность интегралов: $\forall\, \varepsilon > 0$

$$\left|\int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu\right| \le \int_X |f_n - f| d\mu = \int_{\{|f_n - f| \ge \varepsilon\}} |f_n - f| d\mu + \int_{\{|f_n - f| < \varepsilon\}} |f_n - f| d\mu \le \int_{\{|f_n - f| \ge \varepsilon\}} 2F d\mu + \varepsilon\mu(X).$$

Осталось заметить, что $\mu\{|f_n - f| \ge \varepsilon\} \to 0$, стало быть, в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега $\int_{\{|f_n - f| \ge \varepsilon\}} 2F d\mu \to 0$. Теорема доказана.

Следствие. Так как из сходимости п.в. вытекает сходимость по мере, то утверждение теоремы останется справедливым, если вместо сходимости по мере потребовать сходимости п.в.

Замечание. Это обобщение будет удобно в случае $\mu(X) = +\infty$.

Теорема Леви. Пусть $\{f_n(x)\}$ – последовательность интегрируемых на X функций, $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ $\forall\, n \in \mathrm{N}$ п.в. на X и $\exists\, C$: $\int_X f_n d\mu \le C$ $\forall\, n \in \mathrm{N}$. Обозначим через $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ (конечный или бесконечный). Тогда f интегрируема на X, $\int_X f d\mu \le C$ и

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Доказательство. Основное – доказать интегрируемость f (остальное легко вытекает из теоремы Лебега). Не ограничивая общности, считаем, что $f_n \ge 0$. Пусть $\Omega = \{f = +\infty\}$.

Покажем, что $\mu(\Omega)=0$. Пусть $\Omega_n^M=\{f_n \geq M\}$, тогда $\Omega_n^M \subseteq \Omega_{n+1}^M$ и $\Omega^M \equiv \bigcup_{n=1}^{\infty}\Omega_n^M = \lim\limits_{n\to\infty}\Omega_n^M$.

Следовательно, $\mu(\Omega^M)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu(\Omega_n^M)$. В силу неравенства Чебышёва

$\mu(\Omega_n^M)\leq \int_X f_n d\mu / M \leq C/M$, поэтому $\mu(\Omega^M)\leq C/M$.

Покажем, что $\Omega \subset \Omega^M \quad \forall\, M \in \mathrm{N}$. В самом деле, пусть $x\in\Omega$, тогда $f_n(x)\to+\infty$, поэтому $f_n(x)\geq M$ начиная с некоторого номера, стало быть, $x\in\Omega_n^M$ начиная с некоторого номера, стало быть, $x\in\Omega^M$. Следовательно, $\mu^*(\Omega)\leq\mu(\Omega^M)\leq C/M \quad \forall\, M\in\mathrm{N}$, откуда и вытекает равенство $\mu(\Omega)=0$.

<u>Аудиофайл: Z0000060</u>

Представим X в виде $X=\coprod_{k=0}^{\infty}A_k \coprod \Omega$, где $A_k=\{k\leq f<k+1\}$ – измеримые множества. Рассмотрим простую функцию $g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\chi(A_k)$. Так как $f(x)\leq g(x)$, то для доказательства интегрируемости f достаточно доказать, что

$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\mu(A_k)=\sum_{k=0}^{\infty}k\mu(A_k)+\mu(X)<+\infty$. Рассмотрим множество $B_m=\coprod_{k=0}^{m}A_k$. На этом множестве все f_n и f ограничены константой $m+1$, поэтому в силу теоремы Лебега возможен предельный переход под знаком интеграла:

$$C\geq\int\limits_{B_m}f_n d\mu=\sum_{k=0}^{m}\int\limits_{A_k}f_n d\mu\to\sum_{k=0}^{m}\int\limits_{A_k}fd\mu\geq\sum_{k=0}^{m}k\mu(A_k),$$

откуда и следует сходимость ряда $\sum_{k=0}^{\infty}k\mu(A_k)$. Теорема доказана.

Следствие. Если $\{u_k(x)\}$ – последовательность неотрицательных интегрируемых на X функций и $\sum_{k=1}^{\infty}\int_X u_k d\mu<+\infty$, то функция $F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ интегрируема на X и

$$\int\limits_X Fd\mu=\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_X u_k d\mu.$$

Теорема Фату. Пусть $\{f_k(x)\}$ – последовательность неотрицательных интегрируемых на X функций, $\exists\, C:\ \int_X f_k d\mu\leq C \quad \forall\, k\in\mathrm{N}$. Обозначим через $f(x)=\varliminf\limits_{k\to\infty} f_k(x)$ (поточечный предел). Тогда f интегрируема на X и $\int_X fd\mu\leq C$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность функций $F_n(x)=\inf\limits_{k\geq n} f_k(x)$. Она удовлетворяет всем условиям теоремы Леви, поэтому $F(x)=\lim\limits_{n\to\infty}F_n(x)$ интегрируема и $\int_X Fd\mu\leq C$; но $F(x)=f(x)$. Теорема доказана.

Пример* иллюстрирует теорему Фату.

Аудиофайлы: Z0000061, Z0000062

§ 5. Случай $\mu(X)=+\infty$

Рассмотрим теперь случай $\mu(X)=+\infty$.

Определение. Мера μ называется σ-конечной, если $X=\coprod_{k=1}^{\infty}X_k$, где X_k измеримо и $\mu(X_k)<+\infty$, $k=1,2,\ldots$.

Пусть, кроме того, мера μ σ-конечна и задана σ-алгебра Σ.

Определение. Множество $A\subset X$ называется измеримым, если $A\bigcap X_k$ измеримо, $k=1,2,\ldots$; в этом случае $\mu(A)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A\bigcap X_k)$.

Замечание. Эта сумма может быть и бесконечной.

Результаты предыдущих параграфов естественным образом обобщаются на этот случай. Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла допускает обобщение только в случае поточечной сходимости п.в., но не в случае сходимости по мере.

§ 6. Сравнение интегралов Римана и Лебега

Будем рассматривать только одномерный случай. Мера – обычная мера Лебега на прямой.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$. Тогда она интегрируема и по Лебегу на этом отрезке, причем интегралы равны:

$$(L)\int_a^b fdx=(R)\int_a^b fdx.$$

Замечание. Так как интеграл Римана понимается в собственном смысле, то из интегрируемости по Риману вытекает ограниченность функции $f(x)$, а из утверждения теоремы – измеримость этой функции.

Доказательство. Положим $x_k^n\equiv x_k=a+(b-a)k/2^n$, $k=0,1,\ldots,2^n$;

$$M_k=\sup_{[x_k,\,x_{k+1})}f(x),\ m_k=\inf_{[x_k,\,x_{k+1})}f(x),\ S_n=\frac{b-a}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}M_k,\ s_n=\frac{b-a}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}m_k.$$

Так как $f(x)$ интегрируема по Риману, то $S_n-s_n\to 0$ и

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}s_n=(R)\int_a^b fdx.$$

Определим простые функции

$$\overline{f}_n(x)=\sum_{k=0}^{2^n-1}M_k\chi([x_k,x_{k+1})),\ \underline{f}_n(x)=\sum_{k=0}^{2^n-1}m_k\chi([x_k,x_{k+1})).$$

Очевидно,

$$(L)\int_a^b \overline{f}_n dx = S_n\,,\ (L)\int_a^b \underline{f}_n dx = s_n\,.$$

Так как $\overline{f}_n \geq \overline{f}_{n+1}$, $\underline{f}_n \leq \underline{f}_{n+1}$, то существуют

$$\overline{f} = \lim_{n\to\infty} \overline{f}_n\,,\ \underline{f} = \lim_{n\to\infty} \underline{f}_n\,.$$

Так как $\underline{f}_n \leq f \leq \overline{f}_n$, то $\underline{f} \leq f \leq \overline{f}$. Кроме того,

$$(L)\int_a^b \overline{f}_n dx \geq \mathrm{const}\,,\ (L)\int_a^b \underline{f}_n dx \leq \mathrm{const}\,.$$

Следовательно, по теореме Леви функции $\overline{f}$ и $\underline{f}$ интегрируемы и

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (L)\int_a^b \overline{f}_n dx\,,\ \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (L)\int_a^b \underline{f}_n dx\,.$$

Отсюда вытекает, что $\underline{f} = f = \overline{f}$ п.в., интегрируемость f и равенство интегралов Римана и Лебега. Теорема доказана.

Замечание. В случае несобственного интеграла это уже не так, вообще говоря: интеграл

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

существует как несобственный в смысле Римана, но не существует как интеграл Лебега.

Докажем теперь критерий интегрируемости по Риману.

Теорема (критерий интегрируемости по Риману). Ограниченная функция интегрируема по Риману на отрезке тогда и только тогда, когда она п.в. непрерывна.

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ задана и ограничена на отрезке $[a, b]$.

$\Rightarrow$ Пусть $f(x)$ интегрируема по Риману, тогда положим

$$E = \left\{\underline{f} \neq \overline{f}\right\} \cup \left\{x_k^n \mid k = 0, \ldots, 2^n - 1, n = 1, 2, \ldots\right\}$$

(см. предыдущую теорему). В силу предыдущей теоремы $\mu(E) = 0$. Докажем, что $f(x)$ непрерывна на множестве $[a, b] \setminus E$. Пусть $x_0 \in [a, b] \setminus E$, тогда x_0 – внутренняя точка любого разбиения и $\underline{f}(x_0) = \overline{f}(x_0)$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \overline{f}_n(x_0) = \lim_{n\to\infty} \underline{f}_n(x_0) \Rightarrow M_k^n - m_k^n \underset{n\to\infty}{\to} 0\,.$$

Но тогда $\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, n:\ M_k^n - m_k^n < \varepsilon,\ k = 0, \ldots, 2^n - 1$. Рассмотрим разбиение, отвечающее этому n. Точка x_0 принадлежит одному из интервалов этого разбиения, а значит, существует δ-окрестность точки x_0, в которой колебание функции $f(x)$ меньше ε (в качестве δ можно взять расстояние от x_0 до ближайшей точки разбиения), а это и означает, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

$\Leftarrow$ Пусть E – множество точек разрыва функции $f(x)$, $\mu(E)=0$. Обозначим

$$\widetilde{E} = E \bigcup \{x_k^n \mid k = 0, \ldots, 2^n - 1, n = 1, 2, \ldots\}.$$

Достаточно показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \overline{f}_n = \lim_{n\to\infty} \underline{f}_n \text{ п.в.}$$

– тогда можно будет перейти к пределу под знаком интеграла (эти последовательности монотонные и интегралы от них ограничены), так что предельная функция будет интегрируема.

Пусть $x_0 \in [a, b] \setminus \widetilde{E}$. В силу непрерывности $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0:\; \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Отсюда вытекает, что начиная с некоторого номера $\overline{f}_n(x_0) - \underline{f}_n(x_0) < 2\varepsilon$, что и требовалось доказать. Теорема доказана.

Пример. Функция, не эквивалентная никакой непрерывной функции, не интегрируемая по Риману, но интегрируемая по Лебегу: «гребенка Кантора».

Аудиофайл: Z0000063

§ 7. Пространства суммируемых функций

Пространство $L(0,1)$.

Считаем, что $X = (0,1)$ (или $X = [0,1]$), Σ – сигма-алгебра измеримых множеств, μ – сигма-аддитивная мера.

Определение. $L(0,1)$ (или $L_1(0,1)$) – линейное пространство функций, интегрируемых по Лебегу на $(0,1)$, с нормой

$$\|f\| = \int_X |f| d\mu .$$

Легко убедиться, что это действительно норма (эквивалентные функции отождествляются).

Полнота пространства $L(0,1)$.

Теорема. $L(0,1)$ – полное пространство.

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ – фундаментальная последовательность: $\|f_m - f_n\| \underset{m,\,n\to\infty}{\to} 0$. Выберем из нее подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$: $\left\| f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \right\| \le 2^{-k}$. Пусть $S_k = \left|f_{n_1}\right| + \left|f_{n_2} - f_{n_1}\right| + \ldots + \left|f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\right|$, тогда $\{S_k\}$ – это монотонно неубывающая последовательность неотрицательных интегрируемых функций, причем $\int_X S_k d\mu \le C = 1 + \int_X \left|f_{n_1}\right| d\mu$. По следствию из теоремы Леви п.в. существует $F(x) = \lim_{k\to\infty} S_k(x)$ – интегрируемая функция. Так как $f_{n_k} = f_{n_1} + \left(f_{n_2} - f_{n_1}\right) + \ldots + \left(f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\right)$, то п.в. существует $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$ (из сходимости ряда из модулей следует сходимость самого ряда). Кроме того, $\left|f_{n_k}\right| \le F$, $|f| \le F$, поэтому по теореме Лебега $\left\|f_{n_k} - f\right\| = \int_X \left|f_{n_k} - f\right| d\mu \to 0$ ($\left|f_{n_k} - f\right| \le 2F$). Стало быть, и вся последовательность $\{f_n\}$ сходится к f. Единственность предела очевидна. Теорема доказана.

Аппроксимация в интегральной метрике.

Лемма 1. Если f интегрируема, то существует последовательность простых функций $\{f_n\}$: $\|f_n - f\| \to 0$.

Достаточно заметить, что если f неотрицательна, то в качестве $\{f_n\}$ можно брать интегральные суммы из вышеприведенных построений. Произвольную функцию можно представить в виде разности двух неотрицательных.

Лемма 2. Если f интегрируема, то существует последовательность простых функций с конечным числом значений $\{f_n\}$: $\|f_n - f\| \to 0$.

Достаточно заметить, что простую функцию можно приблизить простой функцией с конечным числом значений, отбросив остаток ряда, представляющего эту функцию.

Теорема. Если мера порождена длиной ($d\mu = dx$), f интегрируема, то $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, \varphi \in C[0,1]$: $\|f - \varphi\| < \varepsilon$.

Доказательство. Достаточно аппроксимировать непрерывной функцией характеристическую функцию (индикатор) измеримого множества. Измеримое множество, в свою очередь, с любой точностью можно приблизить открытым (разность индикаторов, очевидно, при этом также будет мала в интегральной метрике), открытое – конечным набором интервалов, а индикатор интервала – непрерывной функцией типа «трапеции». Теорема доказана.

Теорема (о непрерывности в интегральной метрике). Если мера порождена длиной ($d\mu = dx$), f интегрируема, то $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$: $\forall\, \Delta$: $|\Delta| < \delta$

$$\int_X |f(x+\Delta) - f(x)|\, dx < \varepsilon$$

(функцию f доопределяем нулем вне $(0,1)$).

Приблизим функцию f непрерывной функцией на сегменте $[-1,2]$ и воспользуемся тем, что непрерывная функция на сегменте равномерно непрерывна.

§ 8. Пространство $L_p(X, \mu)$

Определение. $L_p(X, \mu)$ – линейное пространство функций, для которых существует интеграл

$$\int_X |f|^p\, d\mu,$$

с нормой

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Замечание. Далее пишем просто $L_p(X)$.

Теорема. $\|f\|_p$ – норма при $1 \le p \le \infty$.

Доказательство. Свойства 1 и 2 нормы очевидны. Докажем свойство 3. Определим q соотношением

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Неравенство Юнга: если $a, b > 0$, то

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Достаточно найти площади фигур под и над графиком функции $y = x^{p-1}$ на отрезках $x \in [0, a]$ и $y \in [0, b]$ соответственно.

Неравенство Гельдера: если $f \in L_p(X)$, $g \in L_q(X)$, то $fg \in L(X)$, причем

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q.$$

Достаточно применить неравенство Юнга к функциям $|f|/\|f\|_p$ и $|g|/\|g\|_q$ и проинтегрировать.

Замечание 1. Неравенство превращается в равенство тогда и только тогда, когда $|f|^{p-1} = C|g|$ п.в.

Замечание 2. При $p = 2$ неравенство Гельдера переходит в неравенство Коши-Буняковского-Шварца.

Аудиофайлы: Z0000064, Z0000065

Неравенство Минковского: если $f, g \in L_p(X)$, то $f + g \in L_p(X)$, причем

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Свойство $f + g \in L_p(X)$ вытекает из неравенства $|f+g|^p \le 2^p \left(|f|^p + |g|^p \right)$, а неравенство Минковского – из оценки (используем неравенство Гельдера)

$$\|f+g\|_p^p \le \int_X |f+g|^{p-1} |f| \, d\mu + \int_X |f+g|^{p-1} |g| \, d\mu \le \left(\|f\|_p + \|g\|_p \right) \left(\int_X |f+g|^p \, d\mu \right)^{1/q}.$$

Замечание. Легко видеть, что неравенство превращается в равенство тогда и только тогда, когда $f = Cg$ п.в.

Теорема доказана.

Замечание. Аналогичные неравенства справедливы и для сумм.

Полнота пространства $L_p(X)$.

Теорема. $L_p(X)$ – полное пространство.

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ – фундаментальная последовательность в $L_p(X)$.

Сначала предположим, что $\mu(X)<\infty$. Из неравенства

$$\|f\|_1=\int\limits_X|f|d\mu\le\left(\int\limits_X|f|^p d\mu\right)^{1/p}\left(\int\limits_X 1d\mu\right)^{1/q}=\|f\|_p\mu^{1/q}(X)$$

вытекает вложение $L_p(X)\subset L(X)$, поэтому $\{f_n\}$ будет фундаментальна и в $L(X)$. Следовательно (см. доказательство полноты $L(X)$), существует подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$: $f_{n_k}\to f$ п.в. Обозначим $\varphi_k=f_{n_k}$. Последовательность $\{\varphi_k\}$ фундаментальна в $L_p(X)$, поэтому $\forall\ \varepsilon>0\ \exists N:\ \forall\ k\ge N,\ \forall\ m\in\mathrm{N}\ \|\varphi_k-\varphi_{k+m}\|_p<\varepsilon$, т.е.

$$\int\limits_X|\varphi_k-\varphi_{k+m}|^p d\mu\le\varepsilon^p.$$

Так как $|\varphi_k-\varphi_{k+m}|^p\to|\varphi_k-f|^p$ п.в. при $m\to\infty$ и неотрицательна, то по теореме Фату $|\varphi_k-f|^p$ интегрируема и

$$\int\limits_X|\varphi_k-f|^p d\mu\le\varepsilon^p.$$

Отсюда вытекает, что $f=(f-\varphi_k)+\varphi_k\in L_p(X)$ и $\|\varphi_k-f\|_p\to 0$, следовательно, $\|f_n-f\|_p\to 0$.

Теперь рассмотрим случай $\mu(X)=\infty$. Построим подпоследовательность, сходящуюся п.в. Так как $X=\coprod_{k=1}^{\infty}X_k$, где X_k измеримо и $\mu(X_k)<+\infty$, $k=1,2,\ldots$, то выберем подпоследовательность $f_{11},f_{12},\ldots,f_{1n},\ldots$, сходящуюся п.в. в X_1. Из этой подпоследовательности, в свою очередь, выберем подпоследовательность $f_{21},f_{22},\ldots,f_{2n},\ldots$, сходящуюся п.в. в X_2, и т.д. Заметим теперь, что диагональная подпоследовательность $f_{11},f_{22},\ldots,f_{nn},\ldots$ сходится п.в. в X, поэтому ее предел и будет искомой функцией. Теорема доказана.

Аппроксимация в интегральной метрике.

Лемма 1. Если $f\in L_p(X)$, то существует последовательность простых функций $f_n\in L_p(X)$: $\|f_n-f\|_p\to 0$.

Доказывается аналогично случаю $L(X)$.

Лемма 2. Если $f\in L_p(X)$, то существует последовательность простых функций с конечным числом значений $f_n\in L_p(X)$: $\|f_n-f\|_p\to 0$.

Как и в случае $L(X)$, достаточно заметить, что простую функцию можно приблизить простой функцией с конечным числом значений, отбросив остаток ряда, представляющего эту функцию.

Теорема. Если $f \in L_p(D)$, D – ограниченное замкнутое множество, мера порождена объемом, то $\exists\, f_n \in C(D)$: $\|f_n - f\|_p \to 0$.

Доказательство. Достаточно аппроксимировать непрерывной функцией характеристическую функцию (индикатор) измеримого множества. Измеримое множество, в свою очередь, с любой точностью можно приблизить конечным объединением замкнутых множеств.

Итак, достаточно доказать утверждение теоремы для характеристической функции $\chi_F(x)$ ограниченного замкнутого множества F. Положим $f_n(x) = 1/(1 + nd(x, F))$, где $d(x, F) = \inf_{y \in F} d(x, y)$ – расстояние между точкой $x \in D$ и множеством F. В силу замкнутости F это расстояние достигается, поэтому $f_n(x) \to \chi_F(x)$. Так как $0 \le f_n(x), \chi_F(x) \le 1$, то $|f_n(x) - \chi_F(x)|^p \le 2^p$, поэтому по теореме Лебега $\|f_n - \chi_F\|_p \to 0$.

Осталось доказать непрерывность $d(x, F)$. В силу неравенства треугольника $d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y)$ $\forall\, x, y, z$. Положим в этом неравенстве $y = \tilde{y}$, где $\tilde{y} : d(z, F) = d(z, \tilde{y})$ (т.е. берем инфинум правой части по y), тогда $d(x, \tilde{y}) \le d(x, z) + d(z, F)$. Но тогда и $d(x, F) \le d(x, z) + d(z, F)$. Следовательно, $d(x, F) - d(z, F) \le d(x, z)$. Меняя аргументы местами, получаем требуемое неравенство $|d(x, F) - d(z, F)| \le d(x, z)$. Теорема доказана.

<u>Аудиофайлы: Z0000066, Z0000067</u>

Теорема (о непрерывности в интегральной метрике). Если мера порождена длиной ($d\mu = dx$), $f \in L_p(D)$, то $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$: $\forall\, \Delta$: $|\Delta| < \delta$

$$\|f(x+\Delta) - f(x)\|_p = \left(\int_D |f(x+\Delta) - f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \varepsilon$$

(функцию f доопределяем нулем вне D).

Доказательство. Вначале предположим, что D – ограниченное множество: $D \subset B(0, R)$ (шар радиуса R с центром в начале координат). Приблизим в замкнутом шаре $\overline{B}(0, R+1)$ функцию f непрерывной функцией φ с точностью ε в интегральной метрике: $\|f - \varphi\|_p < \varepsilon$. Полагаем $|\Delta| < 1$, тогда в силу равномерной непрерывности $\exists\, \delta > 0$: $\forall\, \Delta$: $|\Delta| < \delta$ $\|\varphi(x+\Delta) - \varphi(x)\|_p < \varepsilon$, поэтому

$$\|f(x+\Delta) - f(x)\|_p \le \|f(x+\Delta) - \varphi(x+\Delta)\|_p + \|\varphi(x+\Delta) - \varphi(x)\|_p + \|\varphi(x) - f(x)\|_p < 3\varepsilon.$$

В общем случае, когда D неограниченное, приближаем его шаром достаточно большого радиуса, чтобы интеграл по остатку был мал. Теорема доказана.

§ 9. Пространство l_p

Определение. l_p – линейное пространство бесконечных последовательностей вида $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, для которых

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty,$$

с нормой

$$\|x\|_{l_p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}.$$

Докажите самостоятельно, что $\| \ \|_{l_p}$ – норма при $1 \le p \le \infty$ и что пространство l_p полное. Всюду плотное множество при $1 \le p < \infty$ в этом пространстве образуют конечномерные векторы $(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$.

§ 10. Заряды

Понятие заряда обобщает понятие меры. Мера неотрицательна и счетно-аддитивна, в случае заряда первое требование снимается.

Пусть X – пространство, Σ – сигма-алгебра множеств.

Определение. Отображение $\Phi : \Sigma \to \mathrm{R}$ называется зарядом, если оно счетно-аддитивно, т.е.

$$\Phi\left(\coprod_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi(A_k)$$

для любого набора попарно непересекающихся множеств $A_k \subset \Sigma$.

Для корректности определения необходимо, чтобы ряд в правой части этого равенства сходился абсолютно.

Пример («путеводная звезда»). Пусть μ – сигма-аддитивная мера, f – интегрируемая на X функция (произвольного знака), тогда определим заряд

$$\Phi(A) = \int_A f d\mu$$

для любого измеримого множества $A \subset X$ (это заряд в силу счетной аддитивности интеграла Лебега).

Пусть $X^+ = \{f > 0\}$, $X^- = \{f \le 0\}$,

$$\nu^{\pm}(A) = \pm \int_{X^{\pm} \cap A} f d\mu,$$

тогда

$$\Phi(A) = \nu^+(A) - \nu^-(A).$$

Очевидно, $\nu^\pm(A)$ – сигма-аддитивные меры. Таким образом, заряд представлен в виде разности двух мер. Заметим, что в определении множеств $X^\pm$ есть неопределенность: подмножество $\{f = 0\}$ можно отнести к любому из них (или распределить между ними).

Определение. Множество $A \in \Sigma$ называется положительным (отрицательным) относительно заряда Φ, если $\forall\ B \subset A$, $B \in \Sigma$ $\Phi(B) \geq 0$ ($\Phi(B) \leq 0$).

Лемма. $\forall\ A \in \Sigma$

$$\sup_{B \subset A} |\Phi(B)| < \infty.$$

Доказательство. От противного. Для удобства обозначим

$$\overline{\Phi}(A) = \sup_{B \subset A} |\Phi(B)|.$$

Пусть $\exists\ A \in \Sigma$ такое, что $\overline{\Phi}(A) = +\infty$, тогда построим последовательность множеств следующим образом: $A_1 = A$, $B_1 \subset A_1$: $|\Phi(B_1)| \geq 1$, $|\Phi(B_1) - \Phi(A_1)| \geq 1$ (это возможно, поскольку $\Phi(A)$ фиксировано, а $|\Phi(B)|$ может быть сколь угодно велико). Далее, если $\overline{\Phi}(B_1) = +\infty$, то берем $A_2 = B_1$, а если $\overline{\Phi}(B_1) < +\infty$, то берем $A_2 = A_1 \setminus B_1$. Очевидно, в обоих случаях $\overline{\Phi}(A_2) = +\infty$. Кроме того, в первом случае $|\Phi(A_2)| = |\Phi(B_1)| \geq 1$ и во втором случае $|\Phi(A_2)| = |\Phi(A_1) - \Phi(B_1)| \geq 1$, т.е. в обоих случаях $|\Phi(A_2)| \geq 1$. Далее, $B_2 \subset A_2$: $|\Phi(B_2)| \geq 2$, $|\Phi(B_2) - \Phi(A_2)| \geq 2$, и т.д. В итоге получается последовательность вложенных множеств:

$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots,\ \overline{\Phi}(A_n) = +\infty,\ |\Phi(A_n)| \geq n - 1.$$

Положим $\tilde{A} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$. С одной стороны, $\Phi(\tilde{A})$ конечен, а с другой, он равен пределу $\Phi(A_n)$ – противоречие. Лемма доказана.

Теорема Жордана о разложении заряда. Если Φ – заряд, то существуют такие множества X^+ и X^-, что $X^+ \cap X^- = \varnothing$, $X = X^+ \coprod X^-$, X^+ положительно относительно заряда Φ, X^- отрицательно относительно заряда Φ.

Доказательство. В два шага.

Первый шаг. Докажем, что если $A \in \Sigma$, $\Phi(A) < 0$, то существует отрицательное множество $\tilde{A} \subset A$: $\Phi(\tilde{A}) \leq \Phi(A)$. Обозначим

$$S\Phi(A) = \sup_{B \subset A} \Phi(B).$$

Положим $A_1 = A$. Если $S\Phi(A_1) \leq 0$, то A_1 отрицательное, тогда $\tilde{A} = A_1$, и все доказано; иначе $S\Phi(A_1) > 0$. В силу леммы $S\Phi(A_1)$ конечно. Но тогда $\exists\, B_1 \subset A_1$: $\Phi(B_1) \geq S\Phi(A_1) - 1/2$, $\Phi(B_1) > 0$. Положим $A_2 = A_1 \setminus B_1 \subset A_1$: $\Phi(A_2) = \Phi(A_1) - \Phi(B_1) < \Phi(A_1)$. Если $S\Phi(A_2) \leq 0$, то все доказано, иначе $\exists\, B_2 \subset A_2 :\ \Phi(B_2) \geq S\Phi(A_2) - 1/4,\ \Phi(B_2) > 0$, и т.д. Если процесс бесконечен, то положим $\widetilde{A} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Докажем от противного, что $\widetilde{A}$ – отрицательное. В самом деле, если $\exists\, B \subset \widetilde{A} :\ \Phi(B) > 0$, то $\exists\, N :\ \Phi(B) > 2^{-N}$. Рассмотрим множество B_N. Так как $B_N \not\subset A_{N+1}$, а $B \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, то $B_N \cap B = \varnothing$. Следовательно,

$$\Phi(B_N \cup B) = \Phi\left(B_N \coprod B\right) = \Phi(B_N) + \Phi(B) > S\Phi(A_N) - 2^{-N} + 2^{-N} = S\Phi(A_N),$$

но $B_N \cup B \in A_N$, так что $\Phi(B_N \cup B) \leq S\Phi(A_N)$ – противоречие. Первый шаг закончен.

Второй шаг. Обозначим

$$m = \inf_{A \subset X} \Phi(A).$$

В силу леммы m конечно. Если $m \geq 0$, то $X = X^+$, и теорема доказана. Если $m < 0$, то $\exists\, \{A_n\} :\ \Phi(A_n) \to m$. Не ограничивая общности, считаем, что $\Phi(A_n) < 0$ (последовательность всегда можно проредить). В силу первого шага $\exists\, \{\widetilde{A}_n\} :\ \widetilde{A}_n \subset A_n,\ \widetilde{A}_n$ отрицательны и $\Phi(\widetilde{A}_n) \leq \Phi(A_n)$. Так как, очевидно, $\Phi(\widetilde{A}_n) \geq m$, то $\Phi(\widetilde{A}_n) \to m$. Положим $X^- = \bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{A}_n$. Легко видеть, что $\Phi(X^-) = m$. Покажем от противного, что $X^+ = X \setminus X^-$ – положительное. Пусть $\exists\, A \subset X^+ :\ \Phi(A) < 0$. В силу первого шага существует отрицательное множество $\widetilde{A} \subset A$: $\Phi(\widetilde{A}) \leq \Phi(A)$. Так как $\widetilde{A} \not\subset X^-$, то $X^- \cap \widetilde{A} = \varnothing$, поэтому

$$\Phi(X^- \cup \widetilde{A}) = \Phi(X^- \coprod \widetilde{A}) = \Phi(X^-) + \Phi(\widetilde{A}) < \Phi(X^-) = m$$

– противоречие. Теорема доказана.

<u>Аудиофайл: Z0000091</u>

Следствие. Если Φ – заряд, заданный на Σ, то существуют такие меры $\nu^{\pm}$, что $\Phi(A) = \nu^+(A) - \nu^-(A)\ \ \forall\, A \in \Sigma$.

Доказательство. $X = X^+ \coprod X^-$, $\nu^{\pm}(A) = \pm\nu(A \cap X^{\pm})$ (берем либо верхний, либо нижний знак).

§ 11. Теорема Радона-Никодима

Пусть ν, μ – сигма-аддитивные меры, определенные на общей сигма-алгебре Σ. Существует ли функция f такая, что $\nu(A) = \int_A f d\mu$? В общем случае – нет: ν – индикатор множества, $d\mu = dx$. Устремляя длину отрезка к нулю, приходим к противоречию.

Теорема Радона-Никодима. Если мера ν абсолютно непрерывна относительно меры μ, то существует функция f такая, что $\nu(A) = \int_A f d\mu\ \ \forall\, A \in \Sigma$.

Доказательство. Сначала докажем лемму.

Лемма. Пусть, в дополнение к условиям теоремы, $\nu(X)>0$, тогда $\exists\, A\in\Sigma, \delta>0$: $\nu(A)>0$ и $\forall\, B\subset A$, $B\in\Sigma$ $\nu(B)\geq\delta\mu(B)$.

Доказательство леммы. Рассмотрим заряды $\Phi_n=\nu-\mu/n$. По теореме Жордана $X=X_n^+\coprod X_n^-$. Заметим, что $X_{n+1}^-\subset X_n^-$: в самом деле, пусть $A\subset X_{n+1}^-$, тогда

$$\Phi_n(A)=\nu(A)-\frac{\mu(A)}{n}\leq\nu(A)-\frac{\mu(A)}{n+1}=\Phi_{n+1}(A)\leq 0,$$

стало быть, $A\subset X_n^-$. Положим $\tilde{X}=\bigcap_{n=1}^\infty X_n^-$. Так как $\Phi_n\left(X_n^-\right)\leq 0$, то $\nu\left(X_n^-\right)\leq\mu\left(X_n^-\right)/n\leq\mu\left(X_1^-\right)/n\to 0$, следовательно, $\nu\left(X_n^-\right)\to 0$, так что $\nu\left(\tilde{X}\right)=0$.

Представив множество X в виде

$$X=\tilde{X}\coprod\left(X\setminus\tilde{X}\right)=\tilde{X}\coprod\left(X\setminus\bigcap_{n=1}^\infty X_n^-\right)=\tilde{X}\coprod\left(\bigcup_{n=1}^\infty\left(X\setminus X_n^-\right)\right)=\tilde{X}\coprod\left(\bigcup_{n=1}^\infty X_n^+\right),$$

получим, что $0<\nu(X)=\nu\left(\tilde{X}\right)+\nu\left(\bigcup_{n=1}^\infty X_n^+\right)=\nu\left(\bigcup_{n=1}^\infty X_n^+\right)$. Следовательно, $\exists\, m$: $\nu\left(X_m^+\right)>0$. В силу абсолютной непрерывности $\mu\left(X_m^+\right)>0$. Положим $A=X_m^+$, $\delta=1/m$. Очевидно, $\forall\, B\subset X_m^+$ $\Phi_m(B)=\nu(B)-\mu(B)/m\geq 0$, т.е. $\nu(B)\geq\delta\mu(B)$. Лемма доказана.

Приступим к доказательству теоремы. Рассмотрим класс функций $H=\left\{f\mid f\geq 0,\ f \text{ интегрируема на } X \text{ по мере } \mu, \int_A fd\mu\leq\nu(A)\ \forall\, A\in\Sigma\right\}$. Этот класс непуст: $f\equiv 0\in H$. Рассмотрим интеграл $\int_X fd\mu,\ f\in H$. Так как он не превосходит $\nu(X)$, то существует

$$M=\sup_{f\in H}\int_X fd\mu\leq\nu(X).$$

Рассмотрим последовательность $f_n\in H$: $\int_X f_n d\mu\to M$. На множестве $\{f_n=+\infty\}$ (оно имеет меру нуль и роли не играет) переопределим функцию f_n нулем. Обозначим $F_n=\max\{f_1, f_2,\dots, f_n\}$. Очевидно, $F_{n+1}\geq F_n$ и $F_n\geq f_n$, поэтому, если $F_n\in H$, то $\int_X F_n d\mu\to M$.

Докажем, что $F_n\in H$. Пусть $A\in\Sigma$. Введем следующие подмножества множества A:

$A_{1n}=\{x\in A\mid F_n(x)=f_1(x), F_n(x)\neq f_k(x), k=2,3,\dots,n\}$,

$A_{2n}=\{x\in A\mid F_n(x)=f_2(x), F_n(x)\neq f_k(x), k=3,4,\dots,n\}$, … .

По построению $A=\coprod_{k=1}^n A_{kn}$. Все эти подмножества, очевидно, измеримы. Из оценки

$$\int_A F_n d\mu=\sum_{k=1}^n\int_{A_{kn}}F_n d\mu=\sum_{k=1}^n\int_{A_{kn}}f_k d\mu\leq\sum_{k=1}^n\nu(A_{kn})=\nu(A)$$

вытекает, что $F_n\in H$, так что $\int_X F_n d\mu\to M$. По теореме Леви ($F_n\uparrow$, $\int_X F_n d\mu\leq M$) $F_n\to f$, $f\in H$, $\int_X fd\mu=M$.

Определим теперь для найденной функции f меру $\Phi(A)=\nu(A)-\int_A fd\mu$ (легко убедиться, что это действительно мера). Если $\Phi\equiv 0$, то $\nu(A)=\int_A fd\mu$ и все доказано. Докажем, что случай $\Phi\not\equiv 0$ (т.е. $\Phi(X)>0$) невозможен. В самом деле, в этом случае (мера Φ абсолютно непрерывна относительно меры μ и $\Phi(X)>0$) в силу леммы $\exists\, A\in\Sigma, \delta>0$: $\Phi(A)>0$ и $\forall\, B\subset A$, $B\in\Sigma$ $\Phi(B)\geq\delta\mu(B)$. Рассмотрим функцию $F(x)=f(x)+\delta\chi_A(x)$ (заметим, что $\mu(A)>0$). Докажем, что $F\in H$. Действительно, для любого множества $C\in\Sigma$

$$\int_C Fd\mu=\int_C fd\mu+\delta\mu(C\cap A)\leq\int_C fd\mu+\Phi(C\cap A)=\int_C fd\mu+\nu(C\cap A)-\int_{C\cap A} fd\mu=$$

$$=\int_{C\setminus A} fd\mu+\nu(C\cap A)\leq\nu(C\setminus A)+\nu(C\cap A)=\nu(C),$$

а это и означает, что $F\in H$. Но тогда

$$\int_X Fd\mu=\int_X fd\mu+\delta\mu(A)=M+\delta\mu(A)>M$$

– противоречие. Теорема доказана.

Пример. Формула Ньютона-Лейбница. Пусть $d\mu=dx$ (одномерный случай), $F(x)$ – неубывающая абсолютно непрерывная функция. Эта функция порождает меру: $\nu_F([a,b))=F(b)-F(a)$. Ранее было доказано, что в этом случае мера ν_F абсолютно непрерывна относительно меры μ. Тогда по теореме Радона-Никодима существует функция f такая, что $\nu_F([a,b))=\int_{[a,b)} f(x)dx$. Таким образом, $F(b)-F(a)=\int_{[a,b)} f(x)dx$, что напоминает формулу Ньютона-Лейбница. Если дополнительно потребовать непрерывности функции f, то это будет формула Ньютона-Лейбница (интеграл Лебега переходит в интеграл Римана).

Рассмотренный пример дает идею следующего определения.

Определение. Функцию f из формулировки теоремы Радона-Никодима называют производной Радона-Никодима. Обозначение:

$$f=\frac{d\nu}{d\mu}.$$

Теорема о замене переменной. Пусть мера ν абсолютно непрерывна относительно меры μ, $\rho=d\nu/d\mu$ – производная Радона-Никодима и функция $f\rho$ интегрируема по мере μ. Тогда f интегрируема по мере ν и $\int_X f\rho d\mu=\int_X fd\nu$.

Доказательство. Сначала возьмем в качестве f характеристическую функцию множества: $f=\chi_A$. В этом случае мы получаем утверждение теоремы Радона-Никодима: $\int_X f\rho d\mu=\int_X\chi_A\rho d\mu=\int_A\rho d\mu$, $\int_X fd\nu=\int_X\chi_A d\nu=\nu(A)$, $\int_A\rho d\mu=\nu(A)$. Следовательно, теорема о замене переменной верна и для любой простой функции с конечным числом значений.

Далее, не ограничивая общности, можно считать, что $f \geq 0$ (иначе $f = f_+ - f_-$). Аппроксимируем f простой функцией с конечным числом значений. Положим $A_{kn} = \{k/2^n \leq f < (k+1)/2^n\}$, $f_n = \sum_{k=1}^{\infty} (k/2^n)\chi_{A_{kn}}$, $\tilde{f}_n = \min\{n, f_n\}$ (срезка) – простая функция с конечным числом значений. Ясно, что $\tilde{f}_n \leq f$ и $\tilde{f}_n \to f$.

Так как $\tilde{f}_n\rho \leq f\rho$ и $\tilde{f}_n\rho \to f\rho$, то по теореме Лебега $\int_X \tilde{f}_n\rho d\mu \to \int_X f\rho d\mu$. Кроме того, так как $\int_X \tilde{f}_n d\nu = \int_X \tilde{f}_n \rho d\mu \leq \int_X f\rho d\mu$, $\tilde{f}_n \uparrow$ и $\tilde{f}_n \to f$, то по теореме Леви f интегрируема и $\int_X \tilde{f}_n d\nu \to \int_X f d\nu$. Переходя к пределу в равенстве $\int_X \tilde{f}_n \rho d\mu = \int_X \tilde{f}_n d\nu$, получаем требуемое равенство. Теорема доказана.

Аудиофайл: Z0000092

§ 12. Теорема Фубини

Пусть $X \subset \mathrm{R}^n$, $Y \subset \mathrm{R}^m$ – два пространства («оси»), $Z = X \times Y$.

Лемма. Если P_X и P_Y – полукольца, то $P_Z = P_X \times P_Y$ – полукольцо.

Достаточно заметить, что если $A_i \in P_X$, $B_i \in P_Y$, $D_i = A_i \times B_i$, $i = 1, 2$, то

$$D_1 \cap D_2 = (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) \in P_Z$$

и при $D_1 \subset D_2$

$$D_2 \setminus D_1 = (A_2 \times B_2) \setminus (A_1 \times B_1) = ((A_2 \setminus A_1) \times B_2) \coprod ((B_2 \setminus B_1) \times A_1)$$

(иллюстрируется прямоугольниками на плоскости).

Введем меру: $\mu_Z(D) = \mu_X(A)\mu_Y(B)$, где $A \in P_X$, $B \in P_Y$, $D = A \times B \in P_Z$.

Заметим, что мера представима в виде

$$\mu_Z(D) = \int_X \mu_Y(D_x) d\mu_X ,$$

где $D_x = \{y \in Y \mid (x, y) \in D\}$ – сечение (x – фиксированное).

Теорема. Если μ_X, μ_Y – сигма-аддитивные меры на P_X, P_Y соответственно, то μ_Z – сигма-аддитивная мера на P_Z.

Доказательство. Пусть $D = \coprod_{k=1}^{\infty} D_k$, все $D_k \in P_Z$. Докажем, что $\mu_Z(D) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_Z(D_k)$. Воспользуемся равенством

$$\mu_Z(D) = \int_X \mu_Y(D_x) d\mu_X .$$

Так как $D_x = \coprod_{k=1}^{\infty} D_{kx}$, то $\mu_Y(D_x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_Y(D_{kx})$. Так как

$$\int_X \sum_{k=1}^{n} \mu_Y(D_{kx}) d\mu_X \leq \mu_Z(D),$$

то этот (знакопостоянный) ряд можно интегрировать ряд почленно по теореме Леви, откуда и следует требуемое равенство. Теорема доказана.

Так как мера μ_Z сигма-аддитивна, то ее можно продолжить на минимальное кольцо, а затем продолжить по Лебегу. Обозначим $\mu_Z = \mu_X \otimes \mu_Y$. Заметим, что такое произведение мер коммутативно и ассоциативно.

Предварительно докажем одну лемму общего характера. Буквой B (с возможными индексами) будем обозначать элементарные множества.

Лемма. Пусть μ – мера Лебега, множество C измеримо относительно этой меры, тогда существует множество $D \supset C$: $\mu(C) = \mu(D)$, $D = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$, $C_n \supset C_{n+1}$, $C_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{kn}$, $B_{kn} \subset B_{k+1,\,n}$.

Доказательство. Так как

$$\mu(C) = \mu^*(C) = \inf_{C \in \bigcup_k B_k} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k),$$

то $\forall\, n \,\exists\, B_{kn},\ k = 1, 2, \ldots$:

$$C \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{kn},\ \mu(C) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_{kn}) \le \mu(C) + \frac{1}{n}.$$

Положим $\tilde{B}_{mn} = \bigcup_{k=1}^{m} B_{kn}$, $C_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \tilde{B}_{mn}$,тогда, очевидно, $\tilde{B}_{mn} \subset \tilde{B}_{m+1,\,n}$ и $C_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{kn} \supset C$, поэтому $\mu(C) \le \mu(C_n) \le \mu(C) + 1/n$. Положим теперь $\tilde{C}_n = \bigcap_{k=1}^{n} C_k$, $D = \bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{C}_n$, тогда $\tilde{C}_n \supset \tilde{C}_{n+1}$ и $\mu(C) \le \mu(D) \le \mu(C) + 1/n$, откуда и вытекает равенство $\mu(C) = \mu(D)$.

Замечание (аудиофайл Z0000095). Убедимся, что $\tilde{C}_n$ есть объединение возрастающих элементарных множеств: $\tilde{C}_n = \bigcap_{k=1}^{n} C_k = \bigcap_{k=1}^{n} \bigcup_{m=1}^{\infty} \tilde{B}_{mk} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{n} \tilde{B}_{mk}$, т.е. $\tilde{C}_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \hat{B}_{mn}$, где $\hat{B}_{mn} = \bigcap_{k=1}^{n} \tilde{B}_{mk}$. Так как $\tilde{B}_{mk} \subset \tilde{B}_{m+1,\,k}$, то $\hat{B}_{mn} \subset \hat{B}_{m+1,\,n}$, что и требовалось доказать.

Лемма доказана.

Докажем теперь основное утверждение параграфа.

Теорема. Пусть множество C измеримо относительно меры $\mu_Z = \mu_X \otimes \mu_Y$, тогда для п.в. x сечение C_x измеримо относительно меры μ_Y, функция $\mu_Y(C_x)$ (существующая п.в.) интегрируема по мере μ_X и

$$\mu_Z(C) = \int_X \mu_Y(C_x)\, d\mu_X .$$

Доказательство. Формула была ранее доказана для полукольца, значит, она справедлива и для любого элементарного множества. Требуется распространить эту формулу на случай произвольного измеримого множества. Распространим ее вначале на множества, фигурировавшие в лемме, т.е. на счетные объединения и счетные пересечения монотонных последовательностей элементарных множеств.

1. Пусть $D=\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, $B_k \subset B_{k+1}$ – элементарные, тогда в силу лебеговости меры

$$\mu_Z(D)=\lim_{k\to\infty}\mu_Z(B_k).$$

Далее,

$$\mu_Z(B_k)=\int_X \mu_Y(B_{kx})d\mu_X .$$

Так как $D_x=\bigcup_{k=1}^{\infty} B_{kx}$, $B_{kx}\subset B_{k+1,\,x}$ – элементарные, то

$$\mu_Y(D_x)=\lim_{k\to\infty}\mu_y(B_{kx}).$$

Следовательно,

$$\int_X \mu_Y(B_{kx})d\mu_X \le \text{const}.$$

Таким образом, по теореме Леви функция $\mu_Y(D_x)$ измерима и в формуле

$$\mu_Z(B_k)=\int_X \mu_Y(B_{kx})d\mu_X$$

можно перейти к пределу под знаком интеграла:

$$\mu_Z(D)=\int_X \mu_Y(D_x)d\mu_X ,$$

что и требовалось доказать.

2. Случай $D=\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$, $C_n \supset C_{n+1}$, рассматривается аналогично.

3. Теперь распространим формулу на множества нулевой меры. Пусть $\mu_Z(C)=0$, тогда по лемме существует множество $D\supset C$: $\mu_Z(C)=\mu_Z(D)=0$, для которого справедлива формула

$$\mu_Z(D)=\int_X \mu_Y(D_x)d\mu_X ,$$

откуда следует, что $\mu_Y(D_x)=0$ для п.в. x. Так как $C_x\subset D_x$, то $\mu_Y(C_x)=0$ для п.в. x. Но тогда

$$\int_X \mu_Y(C_x)d\mu_X =0,$$

что и требовалось доказать.

4. Рассмотрим теперь произвольное измеримое множество C. По лемме существует множество $D\supset C$: $\mu_Z(C)=\mu_Z(D)$, для которого формула справедлива. Обозначим $E=D\setminus C$, $\mu_Z(E)=0$. Множество D_x измеримо для всех x, множество E_x измеримо для п.в. x, поэтому множество C_x измеримо для п.в. x и $\mu_Y(D_x)=\mu_Y(C_x)$ для п.в. x. Следовательно,

$$\mu_Z(C)=\mu_Z(D)=\int_X \mu_Y(D_x)d\mu_X =\int_X \mu_Y(C_x)d\mu_X .$$

Теорема доказана.

Следствие. Пусть функция $f(x)\ge 0$, измерима и интегрируема на X,

$C=\{(x,y)\mid 0\le y\le f(x),\, x\in X\}$ (криволинейная трапеция), тогда

$$\mu_Z(C)=\int\limits_X f(x)d\mu_X .$$

Теорема Фубини. I. Пусть функция $f(x,y)$ интегрируема по μ_Z на Z, тогда для п.в. x функция $f(x,y)$ интегрируема по μ_Y, функция

$$I(x)=\int\limits_Y f(x,y)d\mu_Y$$

интегрируема по μ_X и справедливо равенство

$$\int\limits_Z f(x,y)d\mu_Z=\int\limits_X I(x)d\mu_X .$$

Поменяв местами x и y в утверждении теоремы, получим равенство двойного интеграла другому повторному интегралу и, как следствие, равенство повторных интегралов.

II. Если $f(x,y)\ge 0$ и существует повторный интеграл, то существует и двойной интеграл и повторные интегралы равны.

Аудиофайл: Z0000093

Доказательство. I. Не ограничивая общности, полагаем $f\ge 0$. Рассмотрим трапецию $C=\{(x,y,t)\mid 0\le f(x,y)\le t,(x,y)\in X\times Y\}$, тогда по теореме сечение C_x измеримо и

$$(\mu_X\otimes\mu_Y\otimes\mu_t)(C)=\int\limits_X(\mu_Y\otimes\mu_t)(C_x)d\mu_X .$$

С другой стороны, в силу следствия

$$(\mu_X\otimes\mu_Y\otimes\mu_t)(C)=\int\limits_{X\times Y} f(x,y)d(\mu_X\otimes\mu_Y).$$

Но, также в силу следствия,

$$(\mu_Y\otimes\mu_t)(C_x)=\int\limits_Y f(x,y)d\mu_Y ,$$

откуда и вытекает равенство двойного и повторного интегралов. Меняя местами x и y, получаем равенство двойного и другого повторного интегралов.

II. Пусть $f\ge 0$ и повторный интеграл

$$\int\limits_X\int\limits_Y f(x,y)d\mu_Y d\mu_X$$

существует. Рассмотрим последовательность функций

$$f_n=\begin{cases} f,\ f\le n,\\ 0,\ f>n.\end{cases}$$

Очевидно, $f_n\le f_{n+1}$ и каждая f_n ограничена и измерима. Следовательно, f_n интегрируема по мере $\mu_X\otimes\mu_Y$. В силу I

$$\int\limits_{X\times Y} f_n(x,y)d(\mu_X\otimes\mu_Y)=\int\limits_X\int\limits_Y f_n(x,y)d\mu_Y d\mu_X .$$

Но

$$\int_X \int_Y f_n(x, y) d\mu_Y d\mu_X \le \int_X \int_Y f(x, y) d\mu_Y d\mu_X .$$

По теореме Лебега

$$\int_X \int_Y f_n(x, y) d\mu_Y d\mu_X \to \int_X \int_Y f(x, y) d\mu_Y d\mu_X .$$

Далее, так как последовательность интегралов

$$\int_{X \times Y} f_n(x, y) d(\mu_X \otimes \mu_Y)$$

монотонна и ограничена, то последовательность f_n удовлетворяет всем условиям теоремы Леви, поэтому f интегрируема и

$$\int_{X \times Y} f_n(x, y) d(\mu_X \otimes \mu_Y) \to \int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu_X \otimes \mu_Y).$$

Переходя в равенстве

$$\int_{X \times Y} f_n(x, y) d(\mu_X \otimes \mu_Y) = \int_X \int_Y f_n(x, y) d\mu_Y d\mu_X$$

к пределу, получаем требуемое. Теорема доказана.

Примеры.

1. $f(x, y) = \begin{cases} xy(x^2 + y^2)^{-2}, \ x^2 + y^2 > 0, \\ 0, \ x = y = 0. \end{cases} \quad -1 \le x, y \le 1 .$

Повторные интегралы существуют и равны нулю. Функция не интегрируема.

2. $f(x, y) = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)^{-2}, \ 0 < x, y < 1 .$

Повторные интегралы существуют, не равны друг другу. Функция не интегрируема.

Аудиофайлы: Z0000094, Z0000095

Глава 4. Метрические пространства

§ 1. Основные понятия

Определение. Метрическим пространством M называется множество элементов $x, y, \ldots$, в котором любой паре элементов x, y поставлено в соответствие некоторое число $d(x, y)$, называемое метрикой или расстоянием, удовлетворяющее следующим аксиомам:

1^0. $d(x, y) \geq 0$, причем $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

2^0. $d(x, y) = d(y, x)$.

3^0. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ $\forall\, x, y, z \in M$ (неравенство треугольника).

Примеры.

1) R, $d(x, y) = |x - y|$.

2) R^n, $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$.

3) C, $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$.

4) $L_p(D), d(f, g) = \|f - g\|_p$, $p \geq 1$.

5) $l_p, d(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p\right)^{1/p}$, $p \geq 1$.

6) $\mathrm{C}[a, b], d(f, g) = \max\limits_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$.

Лемма. Если d – метрика, то $d/(1+d)$ – тоже метрика.

Достаточно доказать неравенство треугольника: обозначим $d = d(x, y)$, $d_1 = d(x, z)$, $d_2 = d(z, y)$, тогда неравенство

$$\frac{d}{1+d} \leq \frac{d_1}{1+d_1} + \frac{d_2}{1+d_2}$$

вытекает из неравенства $d \leq d_1 + d_2$.

Замечание. $0 \leq d/(1+d) \leq 1$.

Определение. Открытым шаром с центром в точке $x \in M$ радиуса $R > 0$ называется множество $B(x, R) = \{y \in M \mid d(x, y) < R\}$.

Определение. Множество $G \subset M$ называется открытым, если $\forall\, x \in G$ $\exists\, B(x, R) \subset G$.

Определение. Точка $x \in M$ называется предельной для множества F, если $\{B(x, R) \setminus x\} \cap F \neq \varnothing$ $\forall\, R > 0$.

Множество предельных точек множества F обозначим через F'.

Определение. Замыканием множества E называется множество $\overline{F} = F \cup F'$.

Определение. Множество F называется замкнутым, если $\overline{F} = F$.

Теорема. Если G – открытое, то $M \setminus G$ – замкнутое; если F – замкнутое, то $M \setminus F$ –

открытое.

Доказательство. Первое – от противного: пусть $x \in (M \setminus G)'$, но $x \notin M \setminus G$, тогда $x \in G$. Следовательно, $\exists B(x, R) \subset G$. Но тогда $B(x, R) \cap (M \setminus G) = \varnothing$, что означает, что точка x не является предельной для множества $M \setminus G$ – противоречие.

Второе – от противного: пусть $x \in M \setminus F$, но нет ни одного шара с центром в точке x, содержащегося в $M \setminus F$, тогда $\forall R > 0$ $\{B(x, R) \setminus x\} \cap F \neq \varnothing$. Таким образом, точка x является предельной для множества F, но не принадлежит ему – противоречие. Теорема доказана.

Замечание. Существуют множества, не открытые и не замкнутые.

Теорема. Произвольное (не обязательно счетное) объединение открытых множеств открыто. Пересечение конечного числа открытых множеств открыто.

Произвольное (не обязательно счетное) пересечение замкнутых множеств замкнуто. Объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.

§ 2. Принцип сжимающих отображений

Последовательности.

Определение. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, где все $x_n \in M$, называется сходящейся к $x \in M$, если $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$.

Определение. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, где все $x_n \in M$, называется фундаментальной, если $\lim\limits_{m,\, n\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$ (т.е. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathrm{N}$: $\forall n, m > N$ $d(x_n, x_m) < \varepsilon$).

Определение. Метрическое пространство M называется полным, если любая фундаментальная последовательность сходится.

Отображения. Пусть X, Y – метрические пространства,

Определение. Отображение $f: X \to Y$ называется непрерывным в точке $x \in X$, если $\forall \{x_n\}$: $x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$.

Определение. Отображение $f: M \to M$ называется сжимающим, если $\exists \alpha \in (0, 1)$: $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$ $\forall x, y \in M$.

Замечание. Легко видеть, что сжимающее отображение непрерывно.

Теорема (принцип сжимающих отображений). У любого сжимающего отображения, действующего в полном метрическом пространстве, существует и притом единственная неподвижная точка.

Доказательство. Пусть M – полное метрическое пространство, $f: M \to M$ – сжимающее. Возьмем произвольный $x_0 \in M$ и построим последовательность $x_{n+1} = f(x_n)$.

Так как (для определенности полагаем $n > m$)

$$d(x_{n+1}, x_n) \le \alpha d(x_n, x_{n-1}) \le \ldots \le \alpha^n d(x_1, x_0),$$

Аудиофайл: Z0000096

$$d(x_n, x_m) \le d(x_n, x_{n-1}) + \ldots + d(x_{m+1}, x_m) \le (\alpha^{n-1} + \ldots + \alpha^m) d(x_1, x_0) \le \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_1, x_0),$$

то эта последовательность фундаментальна. Легко видеть, что ее предел x удовлетворяет равенству $x = f(x)$ и что других таких элементов нет. Теорема доказана.

Замечание. Скорость сходимости: $d(x_n, x) \le \alpha^n d(x_1, x_0)/(1-\alpha)$.

Теорема. Пусть M – полное метрическое пространство, $f : M \to M$, f^m – сжимающее при некотором $m \in \mathrm{N}$, тогда $\exists!\, x \in M:\ f(x) = x$.

Доказательство. В силу принципа сжимающих отображений $\exists!\, x \in M:\ f^m(x) = x$. Но тогда

$$d(f(x), x) = d(f(f^m(x)), f^m(x)) = d(f^m(f(x)), f^m(x)) \le \alpha d(f(x), x) \Rightarrow d(f(x), x) = 0.$$

Единственность вытекает из того, что если x – неподвижная точка для f, то она неподвижная и для f^m. Теорема доказана.

Теорема. Пусть M – полное метрическое пространство, $f : \overline{B(x_0, r)} \to M$, f – сжимающее на $\overline{B(x_0, r)}$ и $d(f(x_0), x_0) \le (1-\alpha) r$, тогда $\exists!\, x \in \overline{B(x_0, r)}$: $f(x) = x$.

Достаточно заметить, что $f : \overline{B(x_0, r)} \to \overline{B(x_0, r)}$:

$$d(f(x), x_0) \le d(f(x), f(x_0)) + d(f(x_0), x_0) \le \alpha d(x, x_0) + (1-\alpha) r \le r,$$

и взять $\overline{B(x_0, r)}$ в качестве полного метрического пространства.

Аудиофайлы: Z0000097, Z0000111

Замечание. Если вместо неравенства $d(f(x), f(y)) \le \alpha d(x, y)$ выполнено лишь неравенство $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$, $x \ne y$, то неподвижной точки может и не быть.

Пример. $M = [1, +\infty)$, $d(x, y) = |x - y|$, $f(x) = x + 1/x$.

Определение. Метрическое пространство называется компактным, если из любой последовательности его элементов можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Теорема. Пусть M – полное метрическое и компактное пространство, $f : M \to M$, $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ $\forall\, x, y \in M$, $x \ne y$, тогда $\exists!\, x \in M:\ f(x) = x$.

Доказательство. Обозначим $d_0 = \inf\limits_{x \in M} d(f(x), x) \ge 0$. Если $d_0 = 0$, то $\exists\, x_n \in M$: $d(f(x_n), x_n) \to 0$. В силу компактности $\exists\, x_{n_k} \to x \in M$. Легко убедиться, что $f(x) = x$.

Если $d_0 > 0$, то, рассуждая аналогично, находим x_0: $d(f(x_0), x_0) = d_0$, но тогда

$d_0 = d\big(f\big(f(x_0)\big), f(x_0)\big) < d\big(f(x_0), x_0\big) = d_0$ – противоречие.

Единственность легко доказывается от противного: $d(x, \tilde{x}) = d\big(f(x), f(\tilde{x})\big) < d(x, \tilde{x})$.

Теорема доказана.

Пример 1. Линейное интегральное уравнение

$$x(t) = \lambda \int_a^b K(t, \tau) x(\tau) d\tau + y(t),\ t \in [a, b],$$

где $K(t, \tau) \in \mathrm{C}([a, b] \times [a, b]),\ \lambda \in \mathrm{C}$.

Положим $M = \mathrm{C}[a, b],\ d(x, y) = \max\limits_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|,\ K_1 = \max\limits_{t \in [a, b]} \int_a^b |K(t, \tau)| d\tau$,

$$f(x(t)) = \lambda \int_a^b K(t, \tau) x(\tau) d\tau + y(t),$$

тогда f – сжимающее при $|\lambda| K_1 < 1$.

Пример 2. Нелинейное интегральное уравнение

$$x(t) = \lambda \int_a^b K(t, \tau, x(\tau)) d\tau + y(t),\ t \in [a, b],$$

где $K(t, \tau, s) \in \mathrm{C}([a, b] \times [a, b] \times \mathrm{R}),\ \lambda \in \mathrm{C}$.

Положим $M = \mathrm{C}[a, b],\ d(x, y) = \max\limits_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|$,

$$f(x(t)) = \lambda \int_a^b K(t, \tau, x(\tau)) d\tau + y(t)$$

и потребуем, чтобы ядро удовлетворяло условию Липшица по третьему аргументу

$$|K(t, \tau, z_2) - K(t, \tau, z_1)| \le K_0 |z_2 - z_1|$$

равномерно по остальным аргументам, тогда f – сжимающее при $|\lambda| K_0 (b - a) < 1$.

Пример 3. Уравнение Вольтерра

$$x(t) = \lambda \int_a^t K(t, \tau) x(\tau) d\tau + y(t),\ t \in [a, b],$$

где $K(t, \tau) \in \mathrm{C}([a, b] \times [a, b]),\ \lambda \in \mathrm{C}$.

Положим $M = \mathrm{C}[a, b],\ d(x, y) = \max\limits_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|,\ K_0 = \max\limits_{t, \tau \in [a, b]} |K(t, \tau)|$,

$$f(x(t)) = \lambda \int_a^b K(t, \tau) x(\tau) d\tau + y(t),$$

тогда в силу оценок

$$|f(x_2) - f(x_1)| \le |\lambda| K_0 (t - a) d(x_1, x_2),\ |f^m(x_2) - f^m(x_1)| \le \frac{\big(|\lambda| K_0 (b - a)\big)^m}{m!} d(x_1, x_2)$$

f^m – сжимающее при некотором m, откуда следует однозначная разрешимость уравнения

Вольтерра при любом λ.

§ 3. Теорема Хаусдорфа о пополнении метрического пространства

Определение. Два метрических пространства называются изометрическими, если между ними существует взаимно однозначное соответствие, сохраняющее метрику.

Теорема Хаусдорфа. Пусть M – метрическое пространство, тогда существует единственное (с точностью до изометрии) полное метрическое пространство $\widetilde{M}$ такое, что $M \sim M_0$ (изометрия), $M_0 \subseteq \widetilde{M}$ и $\overline{M}_0 = \widetilde{M}$ ($\overline{M}_0$ – замыкание M_0).

Доказательство. Рассмотрим всевозможные фундаментальные последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in M$. Две такие последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ будем называть эквивалентными, если $d(x_n, y_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Пусть X – класс фундаментальных последовательностей, эквивалентных последовательности $\{x_n\}$. Через $\widetilde{M}$ обозначим множество всех таких классов. Расстояние между классами определим формулой $d(X, Y) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$. Легко видеть, что это предел существует и не зависит от выбора представителя класса. Аксиомы метрики также легко проверяются. Таким образом, $\widetilde{M}$ – метрическое пространство.

Определим теперь M_0 как множество стационарных последовательностей вида $X = \{x, x, \dots, x, \dots\}$, $x \in M$, и зададим соответствие $M \leftrightarrow M_0$ по правилу $x \leftrightarrow X$. Покажем, что $\overline{M}_0 = \widetilde{M}$. В самом деле, в силу фундаментальности произвольной последовательности $\{x_n\}$ $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, m : d(x_n, x_m) < \varepsilon\ \forall\, n \ge m$. Следовательно, $Y_m = \{x_m, x_m, \dots, x_m, \dots\}$ приближает $\{x_n\}$ с точностью ε.

<u>Аудиофайл: Z0000112</u>

Докажем теперь полноту $\widetilde{M}$. Пусть $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальная последовательность в $\widetilde{M}$: $\lim_{m,n\to\infty} d(X_m, X_n) = 0$. Каждый элемент $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ приблизим стационарной последовательностью $Y_n = \{y_n, y_n, \dots, y_n, \dots\}$: $d(X_n, Y_n) \le 1/n$.

Положим теперь $X = \{y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\}$. Фундаментальность X вытекает из оценки

$$d(y_m, y_n) = d(Y_m, Y_n) \le d(Y_m, X_m) + d(X_m, X_n) + d(X_n, Y_n) \le 1/m + d(X_m, X_n) + 1/n \to 0,$$

а сходимость $X_n \to X$ – из оценки

$$d(X, X_n) \le d(X, Y_n) + d(Y_n, X_n) \le d(X, Y_n) + 1/n = \lim_{m\to\infty} d(y_m, y_n) + 1/n \to 0.$$

Докажем единственность. Пусть $M \sim M_0 \subset \widetilde{M}$, $M \sim M_0' \subset \widetilde{M}'$, тогда $M_0 \sim M_0'$. Но $\overline{M}_0 = \widetilde{M}$, $\overline{M}_0' = \widetilde{M}'$, откуда следует, что $\widetilde{M} \sim \widetilde{M}'$. Теорема доказана.

<u>Аудиофайл: отсутствует</u>

§ 4. Теорема Бэра о категориях

Пусть M – метрическое пространство.

Определение. $E \subset M$ называется плотным (в M), если $\overline{E} = M$.

Определение. $E \subset M$ называется нигде не плотным (в M), если $\overline{E}$ не содержит ни одного шара.

Лемма. Замкнутое множество F нигде не плотно в $M \Leftrightarrow \overline{M \setminus F} = M$.

Доказательство. Обозначим $G = M \setminus F$.

$\Rightarrow$ От противного: пусть $\overline{G} \neq M$, тогда $\exists\, x \in M:\ x \notin \overline{G} \Rightarrow x \notin G \Rightarrow x \in F$. Так как F не содержит ни одного шара, то $\forall\, r > 0\ B(x, r) \cap G \neq \varnothing \Rightarrow x$ – предельная точка $G \Rightarrow x \in \overline{G}$ – противоречие.

$\Leftarrow$ От противного: пусть $\exists\, B(x, r) \subset F$, тогда $B(x, r) \cap G = \varnothing \Rightarrow x \notin \overline{G} \Rightarrow \overline{G} \neq M$ – противоречие. Лемма доказана.

Теорема о вложенных шарах. Пусть M – полное метрическое пространство, $\overline{B(x_1, r_1)} \supset \overline{B(x_2, r_2)} \supset \ldots,\ \lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$, тогда $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B(x_n, r_n)} \neq \varnothing$.

Достаточно заметить, что центры шаров образуют фундаментальную последовательность и ее предел принадлежит всем замкнутым шарам.

Пример. Если $r_n \not\to 0$, то утверждение, вообще говоря, неверно: $M = \mathrm{N}$, $d(m, n) = 1 + 1/\min(m, n),\ m \neq n,\ d(m, m) = 0,\ \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B(n, 1 + 1/n)} = \varnothing$.

Лемма. Пусть M – полное метрическое пространство, G_n, $n = 1, 2, \ldots,$ – открытые множества, $\overline{G_n} = M$, тогда $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \varnothing$.

Доказательство. Построим последовательность вложенных замкнутых шаров с радиусами, стремящимися к нулю. Так как G_1 – открытое, то $\exists\, B(x_1, \tilde{r}_1) \subset G_1$, $\tilde{r}_1 \leq 1$, следовательно, $\exists\, \overline{B(x_1, r_1)} \subset B(x_1, \tilde{r}_1) \subset G_1$, $r_1 < 1$. Так как $B(x_1, r_1) \cap G_2 \neq \varnothing$ (иначе G_2 не плотно в M) и открытое, то $\exists\, B(x_2, \tilde{r}_2) \subset (B(x_1, r_1) \cap G_2)$, $\tilde{r}_2 \leq 1/2$, и т.д. По теореме о вложенных шарах $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B(x_n, r_n)} \neq \varnothing$, а значит, в силу вложения $\overline{B(x_n, r_n)} \subset G_n$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \varnothing$. Лемма доказана.

Определение. Множество называется множеством первой категории, если его можно представить в виде счетного объединения нигде не плотных множеств. Множество, не относящееся к первой категории, – это множество второй категории.

Теорема Бэра. Полное метрическое пространство есть множество второй категории.

Доказательство. От противного: пусть $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, каждое E_n нигде не плотно в M, тогда $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{E}_n$, $\varnothing = M \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{E}_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (M \setminus \overline{E}_n) \neq \varnothing$ по лемме. Теорема доказана.

Пример. Из теоремы Бэра вытекает, что существует непрерывная на отрезке функция, не дифференцируемая ни в одной точке.

§ 5. Компактность в метрических пространствах

Пусть M – метрическое пространство.

Определение. M называется компактным, если из любой последовательности его элементов можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Лемма. Компактное M полно.

Очевидно.

Определение. M называется предкомпактным, если из любой последовательности его элементов можно выделить фундаментальную подпоследовательность.

Очевидно, если M предкомпактно и полно, то оно компактно.

<u>Аудиофайлы: Z0000114, Z0000115</u>

Определение. M называется ограниченным, если $\sup_{x,y\in M} d(x, y) < \infty$.

Лемма. Предкомпактное M ограничено.

Достаточно заметить, что условие $d(x_m, y_n) \to \infty$ противоречит фундаментальности подпоследовательностей $\{x_{m_k}\}$ и $\{y_{n_l}\}$.

Обратное в бесконечномерном случае неверно: из ограниченности предкомпактность не следует.

Пример. Подмножество ортов $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, где $e_k = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ (единица стоит в k-той позиции), ограничено, но не предкомпактно в l_2: $d(e_m, e_n) = \sqrt{2}$, $m \neq n$.

Определение. $Q \subset M$ называется ε-сетью для $E \subset M$, если $E \subset \bigcup_{x\in Q} B(x, \varepsilon)$.

Замечание. Если $E \neq M$, то Q не обязано содержаться в E; однако в этом случае для E можно построить 2ε-сеть, которая уже будет содержаться в E. В самом деле, рассмотрим шар $B(x, \varepsilon)$. Если $B(x, \varepsilon) \cap E = \varnothing$, то этот шар можно исключить; в противном случае $\exists\, y \in B(x, \varepsilon) \cap E$, и $B(x, \varepsilon) \subset B(y, 2\varepsilon)$, так что множество всех таких y и будет искомой 2ε-сетью.

Определение. M называется вполне ограниченным, если $\forall\, \varepsilon > 0$ его можно накрыть конечной ε-сетью: $M \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \varepsilon)$.

Замечание. Из полной ограниченности вытекает ограниченность, но не наоборот.

Теорема Хаусдорфа. M предкомпактно тогда и только тогда, когда оно вполне ограничено.

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть M предкомпактно. Зафиксируем $\forall\, \varepsilon > 0$. Выберем произвольный $x_1 \in M$ и рассмотрим шар $B(x_1, \varepsilon)$. Если $M \subset B(x_1, \varepsilon)$, то все доказано, иначе выберем $x_2 \in M \setminus B(x_1, \varepsilon)$. Заметим, что $d(x_1, x_2) \geq \varepsilon$. Если $M \subset B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon)$, то все доказано, иначе выберем $x_3 \in M \setminus (B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon))$, и т.д. Если этот процесс не обрывается, то получим последовательность $\{x_n\}$, $d(x_k, x_n) \geq \varepsilon$ при $k \neq n$, из которой невозможно выбрать фундаментальную подпоследовательность.

$\Leftarrow$ Пусть M вполне ограничено. Выберем произвольную последовательность $\{x_n\}$. Положим $\varepsilon_m = 2^{-m}$. Некоторый конечный набор шаров радиуса ε_1 накрывает M, поэтому по крайней мере один из них содержит бесконечное число членов $\{x_n\}$ (подпоследовательность). Накроем этот шар конечным набором шаров радиуса ε_2; один из них опять содержит бесконечное число членов подпоследовательности, и т.д. Выбрав на каждом этапе по элементу, построим подпоследовательность, которая, как легко видеть, будет фундаментальна. Теорема доказана.

Следствие (признак предкомпактности). M предкомпактно, если $\forall\, \varepsilon > 0$ существует предкомпактная ε-сеть.

Доказательство. Пусть $\forall\, \varepsilon > 0$ существует предкомпактная ε-сеть Q: $M \subset \bigcup_{x\in Q} B(x, \varepsilon)$, Q предкомпактно, тогда в силу предкомпактности Q существует конечная ε-сеть, т.е. $Q \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \varepsilon)$. Но тогда, как легко видеть, $M \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, 2\varepsilon)$.

Теорема о компактности (лемма Гейне-Бореля). M компактно тогда и только тогда, когда из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

Доказательство. $\Leftarrow$ Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}$. Положим $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$.

1^0. Покажем, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{X}_n \neq \varnothing$. В самом деле, пусть это не так, тогда $M = M \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{X}_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (M \setminus \overline{X}_n)$, т.е. открытые множества $M \setminus \overline{X}_n$ образуют покрытие пространства M. По условию $\exists\, N$: $M = \bigcup_{n=1}^{N} (M \setminus \overline{X}_n)$, следовательно, $\bigcap_{n=1}^{N} \overline{X}_n = \varnothing$, что противоречит тому, что $x_N \in \bigcap_{n=1}^{N} X_n$.

2^0. Пусть $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{X}_n$ (конечно, $x \in M$). Возможны следующие случаи:

а) $x \in X_{n_1}, X_{n_2}, \ldots$ (бесконечная подпоследовательность): в качестве фундаментальной можно взять стационарную подпоследовательность $x, x, \ldots$;

б) $x \in X_{n_1}, X_{n_2}, \ldots, X_{n_m}$: $x \notin X_{n_m+1}, X_{n_m+2}, \ldots$: в этом случае x – предельная точка для всех X_n, начиная с номера $n_m + 1$, а стало быть, в любой окрестности точки x найдется точка из X_n, что и позволяет выбрать из $\{x_n\}$ сходящуюся подпоследовательность.

$\Rightarrow$ От противного. Пусть $\{G_\alpha\}$ – открытое покрытие M, из которого нельзя выделить конечное подпокрытие. Так как M компактно, то по теореме Хаусдорфа оно вполне ограничено. Положим $\varepsilon_m = 2^{-m}$. Накроем M конечным набором шаров радиуса ε_1. По предположению среди них существует шар $B_1 = B(x_1, \varepsilon_1)$, из покрытия $\{G_\alpha\}$ которого нельзя выделить конечное подпокрытие. Накроем B_1 конечным набором шаров радиуса ε_2. Среди них опять найдется шар B_2, из покрытия $\{G_\alpha\}$ которого нельзя выделить конечное подпокрытие, и т.д. Легко видеть, что центры шаров B_l образуют фундаментальную последовательность. В силу компактности M эта последовательность сходится; пусть $y \in M$ – ее предел. Так как y содержится в одном из открытых множеств G_α, то существует шар с центром в y, содержащийся в G_α, причем ясно, что все шары B_l, начиная с некоторого номера, попадают в этот шар - противоречие. Теорема доказана.

Аудиофайл: Z0000116

§ 6. Критерий предомпактности в $C(K)$, $L_p(K)$, l_p

Пусть K – замкнутое ограниченное множество в R^n (компакт).

Пространство $C(K)$.

Теорема Арцела-Асколи. Множество функций $E \subset C(K)$ предкомпактно тогда и только тогда, когда оно равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.

Доказательство. $\Leftarrow$ См. программу 2 курса.

$\Rightarrow$ Ограниченность вытекает из теоремы Хаусдорфа, а равностепенная непрерывность – из существования конечной ε-сети и равномерной непрерывности непрерывной функции, заданной на компакте. Теорема доказана.

Контрпример. $K = [0, +\infty)$,

$$f_n(t) = \begin{cases} 1,\ 0 \le t \le n, \\ n+1-t,\ n < t < n+1, \\ 0,\ t \ge n+1. \end{cases}$$

Эта последовательность равномерно ограничена и равностепенно непрерывна, но выбрать из нее фундаментальную подпоследовательность нельзя: $f_n \to 1$, $\|f_n - 1\| = 1$.

Замечание. Если K некомпактно, то нужно добавить следующее ограничение: $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, M = M(\varepsilon) > 0$: $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon \ \ \forall\, n \in \mathrm{N}$, $\forall\, t : |t| > M$.

Пространство $L_p(K)$.

Теорема Рисса. Множество функций $E \subset L_p(K)$ предкомпактно тогда и только тогда, когда оно равномерно ограничено и равностепенно непрерывно в $L_p(K)$, т.е. $\|f\|_p \le M$ $\forall\, f \in E$ и $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $\|f(x+\Delta) - f(x)\|_p < \varepsilon \ \ \forall\, f \in E$, $\forall\, \Delta : |\Delta| < \delta$ ($f \equiv 0$ вне K).

Доказательство. $\Rightarrow$ Аналогично теореме Арцела-Асколи.

$\Leftarrow$ Построим предкомпактную ε-сеть, опираясь на понятие усреднения. Положим

$$\omega(r) = \begin{cases} A(1-r),\ 0 \le r \le 1, \\ 0,\ r > 1, \end{cases}$$

где постоянная A такова, что (S_n – единичная n-мерная сфера)

$$1=\int\limits_{R^n}\omega(|x|)dx=\{сферические\ координаты\}=A|S_n|\int\limits_0^1(1-r)r^{n-1}dr=\frac{A|S_n|}{n(n+1)},\ A=\frac{n(n+1)}{|S_n|};$$

$$\omega_\Delta(|x|)=\frac{1}{\Delta}\omega\left(\frac{|x|}{\Delta}\right).$$

Очевидно, $\int\limits_{R^n}\omega_\Delta(|x|)dx=1$ и $\omega_\Delta=0$ при $|x|>\Delta$. Определим теперь усреднение: всякой функции $f\in L_p(K)$ сопоставим функцию

$$f_\Delta(x)=\int\limits_{R^n}\omega_\Delta(|y-x|)f(y)dy=\int\limits_{R^n}\omega_\Delta(|z|)f(z+x)dz.$$

Так как

$$f_\Delta(x)-f(x)=\int\limits_{R^n}\omega_\Delta(|z|)(f(z+x)-f(x))dz,$$

то в силу неравенства Гельдера и теоремы Фубини

$$\|f_\Delta-f\|_p^p=\int\limits_{R^n}|f_\Delta(x)-f(x)|^p dx\le\int\limits_{R^n}\left(\int\limits_{R^n}|f(x+z)-f(x)|^p\omega_\Delta(|z|)dz\right)\left(\int\limits_{R^n}\omega_\Delta(|z|)dz\right)^{p/q}dx=$$

$$=\int\limits_{R^n}\left(\int\limits_{R^n}|f(x+z)-f(x)|^p dx\right)\omega_\Delta(|z|)dz\le\varepsilon^p\int\limits_{R^n}\omega_\Delta(|z|)dz=\varepsilon^p,$$

т.е. $\|f_\Delta-f\|_p\le\varepsilon$, следовательно, $\{f_\Delta\}$ образует ε-сеть.

В силу неравенства Гельдера эта сеть равномерно ограничена и равностепенно непрерывна в $C(K)$. Следовательно, она предкомпактна в $C(K)$. Осталось заметить, что из равномерной сходимости в $C(K)$ вытекает сходимость в $L_p(K)$. Теорема доказана.

Замечание. В случае неограниченной области – аналогично замечанию к теореме Арцела-Асколи.

Пространство l_p.

Будем обозначать $x=(x_1,x_2,\dots)$, $P_N(x)=(x_1,x_2,\dots,x_N,0,0,\dots)$, $R_N(x)=x-P_N(x)$. Очевидно, $\|P_N(x)\|_{l_p}\le\|x\|_{l_p}$, $\forall\,x\in l_p$, $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,N:\ \|R_N(x)\|_{l_p}<\varepsilon$.

Теорема. $E\subset l_p$ предкомпактно тогда и только тогда, когда

1) $\exists\,M\ge0$: $\|x\|_{l_p}\le M\ \ \forall\,x\in E$ и

2) $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,N=N(\varepsilon)$: $\|R_N(x)\|_{l_p}<\varepsilon\ \ \forall\,x\in E$.

Доказательство. $\Rightarrow$ Ограниченность вытекает из предкомпактности. Далее, $\forall\,\varepsilon>0$ существует конечная ε-сеть: $E\subset\bigcup_{k=1}^n B(z^k,\varepsilon)$, $z^k\in l_p$. В силу конечности числа узлов $\exists\,N$: $\|R_N(z^k)\|_{l_p}<\varepsilon$ сразу для всех узлов. Так как $\forall\,x\in E\ \ \exists\,k:\|x-z^k\|_{l_p}<\varepsilon$, то $\|R_N(x)\|_{l_p}<2\varepsilon$.

$\Leftarrow$ $\{P_N(x)\}$ образует ε-сеть и фактически составляет конечномерное пространство. Из его предкомпактности вытекает предкомпактность E. Теорема доказана.

Глава 5. Банаховы пространства

§ 1. Основные понятия

Определение. Вещественное линейное пространство X называется нормированным, если каждому элементу $x \in X$ поставлено в соответствие некоторое число $\|x\|$, называемое нормой, удовлетворяющее следующим аксиомам:

1^0. $\|x\| \geq 0$, причем $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

2^0. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ $\forall\, \lambda \in \mathrm{R}$.

3^0. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $\forall\, x, y \in X$ (неравенство треугольника).

Замечание 1. Можно рассматривать пространство над произвольным полем (в частности, комплексное пространство), но в этом семестре мы ограничимся вещественным случаем.

Замечание 2. Линейное нормированное пространство является частным случаем метрического пространства, если ввести расстояние по формуле $d(x, y) = \|x - y\|$; соответственно, утверждения, доказанные для метрического пространства, переносятся на случай нормированного пространства.

Аудиофайлы: Z0000117, Z0000122

Понятия сходимости и фундаментальной последовательности определяются очевидным образом.

Определение. Полное линейное нормированное пространство называется банаховым.

Рассмотрим отображения. Пусть X, Y – линейные нормированные пространства, $A: X \to Y$ – отображение (оператор).

Определение. Отображение A называется непрерывным в точке x, если $\forall\, x_n \to x$ $Ax_n \to Ax$.

Лемма. Если A – линейное отображение, непрерывное в одной точке, то оно непрерывно всюду.

Доказательство. Пусть A непрерывно в точке $\tilde{x}$, тогда $\forall\, \tilde{x}_n \to \tilde{x}$ $A\tilde{x}_n \to A\tilde{x}$. Рассмотрим $\forall\, x \in X$ и $\forall\, x_n \to x$. Так как $x_n - x + \tilde{x} \to \tilde{x}$, то $A(x_n - x + \tilde{x}) \to A\tilde{x}$, но в силу линейности отображения $A(x_n - x + \tilde{x}) = Ax_n - Ax + A\tilde{x}$, поэтому $Ax_n \to Ax$. Лемма доказана.

Пример. $X = C[0,1]$, $A = d/dt$, $Y = C[0,1]$. Заметим, что A определено не во всем пространстве. A не является непрерывным: $x_n(t) = n^{-1/2}\sin nt \to 0$, $(Ax_n)(t) = n^{1/2}\cos nt \not\to 0$.

Определение. Отображение A называется ограниченным, если оно любое ограниченное множество переводит в ограниченное множество.

Определение. Нормой ограниченного отображения A называется

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\le 1}\|Ax\|.$$

Замечание. Это определение применяется и для нелинейных отображений.

Лемма. Если A – линейное отображение, то

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1}\|Ax\| = \sup_{x\ne 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Доказательство очевидно.

Следствие. $\|Ax\| \le \|A\|\|x\|$.

Пространство линейных ограниченных операторов будем обозначать $L(X,Y)$. Легко видеть, что оно будет линейным нормированным пространством.

Теорема. Линейный оператор непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен.

Доказательство. $\Leftarrow$ $\|Ax_n - Ax\| = \|A(x_n - x)\| \le \|A\|\|x_n - x\| \to 0$.

$\Rightarrow$ От противного: пусть $\exists\, x_n$: $\|x_n\| \le 1$, $\|Ax_n\| \to +\infty$, тогда $z_n = x_n / \sqrt{\|Ax_n\|} \to 0$, $Az_n \not\to 0$. Теорема доказана.

Теорема. Если Y банахово, то $L(X,Y)$ тоже банахово.

Замечание. Полнота X не требуется.

Доказательство. Рассмотрим фундаментальную последовательность $A_n \in L(X,Y)$: $\|A_n - A_m\| \to 0$. Так как $\forall x \in X$ последовательность $A_n x$ фундаментальна, то $\exists \lim_{n\to\infty} A_n x$. Определим оператор A по правилу $Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x$. В неравенстве $\|A_n x - A_{n+m}x\| \le \|A_n - A_{n+m}\|\|x\| \le \varepsilon\|x\|$ устремим m к бесконечности: $\|A_n x - Ax\| \le \varepsilon\|x\|$, $\|A_n - A\| \le \varepsilon$,откуда вытекает, что A ограничен и $A_n \to A$. Теорема доказана.

Докажем теперь одну из основных теорем функционального анализа.

Теорема Банаха-Штейнгауза. Пусть X, Y – линейные нормированные пространства, $A_n \in L(X,Y)$, $E = \left\{x \in X : \overline{\lim_{n\to\infty}}\|A_n x\| < \infty\right\}$ – множество второй категории, тогда последовательность $\{A_n\}$ ограничена, т.е. $\exists\, M \ge 0 : \|A_n\| \le M$.

Доказательство. Введем множества $F_{nm} = \{x \in X : \|A_n x\| \le m\}$. Легко видеть, что они замкнуты. Положим $F_m = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_{nm}$ и докажем, что $E = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m$. В самом деле, пусть $x \in E$, тогда $\exists\, m : \|A_n x\| \le m \;\Rightarrow\; x \in F_{nm}\ \forall\, n \;\Rightarrow\; x \in F_m \;\Rightarrow\; x \in \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m$. Обратно, пусть $x \in \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m$, тогда $\exists\, m : x \in F_m \;\Rightarrow\; x \in F_{nm}\ \forall\, n \;\Rightarrow\; \|A_n x\| \le m \;\Rightarrow x \in E$.

Так как E – множество второй категории, то хотя бы одно множество F_m не является нигде не плотным, т.е. $B(x_0, r) \subset F_m$. Рассмотрим $\forall\, x \in X$, $x \neq 0$. Положим

$$z = x_0 + \frac{rx}{2\|x\|} \in B(x_0, r).$$

Так как $z \in F_m$, то

$$m \geq \|A_n z\| \geq \frac{r\|A_n x\|}{2\|x\|} - \|A_n x_0\| \geq \frac{r\|A_n x\|}{2\|x\|} - m \;\Rightarrow\; \frac{\|A_n x\|}{\|x\|} \leq \frac{4m}{r} \;\Rightarrow \|A_n\| \leq \frac{4m}{r}.$$

Теорема доказана.

Следствие из теоремы Банаха-Штейнгауза. Пусть X, Y – линейные нормированные пространства, причем X – полное, $A_n \in L(X, Y)$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|A_n x\| < \infty\; \forall\, x \in X$, тогда $\exists\, M \geq 0 : \|A_n\| \leq M$.

Достаточно вспомнить, что полное нормированное пространство является множеством второй категории (теорема Бэра).

Рассмотрим пример применения теоремы Банаха-Штейнгауза и следствия из нее. Пусть $S_n(x, f)$ – тригонометрическая сумма для функции f.

Утверждение. Существует функция $f \in C[-\pi, \pi]$ такая, что $S_n(0, f) \to \infty$.

Доказательство. $X = C[-\pi, \pi]$,

$$S_n(x, f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)}dt,\; S_n(0, f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)}dt = A_n f.$$

Достаточно доказать, что $\|A_n\| \to +\infty$. В самом деле,

$$\|A_n\| = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{|\sin(n+1/2)t|}{2\sin(t/2)}dt \geq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin^2(n+1/2)t}{t}dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi(n+1/2)}\frac{\sin^2 s}{s}ds = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi(n+1/2)}\frac{1-\cos(2s)}{s}ds \to +\infty.$$

<u>Аудиофайл: Z0000123</u>

Обоснуем последнее утверждение о норме оператора.

Теорема. Пусть в пространстве $C[a, b]$ задан линейный функционал

$$A(x(t)) = \int_a^b \varphi(t)x(t)dt,\; \varphi(t) \in L(a, b).$$

Тогда

$$\|A\| = \int_a^b |\varphi(t)|dt.$$

Доказательство. С одной стороны,

$$|A(x(t))| \leq \int_a^b |\varphi(t)||x(t)|dt \leq \|x\|\int_a^b |\varphi(t)|dt \;\Rightarrow\; \|A\| \leq \int_a^b |\varphi(t)|dt.$$

С другой стороны, если

$$(\operatorname{sgn}\varphi)_\Delta(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{sgn}\varphi(s+t)\omega_\Delta(s)ds$$

$$(\left|(\operatorname{sgn}\varphi)_\Delta(t)\right|\le\int_{-\infty}^{+\infty}\omega_\Delta(s)ds=1),$$

то

$$A((\operatorname{sgn}\varphi)_\Delta(t))=\int_a^b\varphi(t)(\operatorname{sgn}\varphi)_\Delta(t)dt\underset{\Delta\to0}{\to}\int_a^b\varphi(t)\operatorname{sgn}\varphi(t)dt=\int_a^b|\varphi(t)|dt\ \Rightarrow\ \|A\|\ge\int_a^b|\varphi(t)|dt,$$

что и доказывает теорему.

§ 2. Обратные операторы

Пусть (также и в последующих параграфах этой главы) X , Y – линейные нормированные пространства, $A: X\to Y$.

Левый и правый обратные операторы.

Определение. $A_Л^{-1}:Y\to X$ называется левым обратным к A, если $A_Л^{-1}A=E$.

Определение. $A_П^{-1}:Y\to X$ называется правым обратным к A, если $AA_П^{-1}=E$.

Теорема. Если левый и правый обратные операторы существуют, то они равны.

Достаточно заметить, что $A_Л^{-1}=A_Л^{-1}\left(AA_П^{-1}\right)=\left(A_Л^{-1}A\right)A_П^{-1}=A_П^{-1}$.

В этом случае $A_Л^{-1}=A_П^{-1}=A^{-1}$ называется обратным оператором.

Замечание. Из существования одного из них, вообще говоря, не вытекает существование другого.

Теорема. Следующие три утверждения эквивалентны.

1^0. Уравнение $Ax=y$ имеет не более одного решения.

2^0. $\ker A=\{0\}$.

3^0. $\exists\, A_Л^{-1}$.

Доказательство. $1^0\Rightarrow2^0$: $Ax=0$, $x\ne0\Rightarrow A\tilde{x}=y$, $A(\tilde{x}+x)=y$.

$2^0\Rightarrow3^0$: $y\in R(A)\Rightarrow\exists!\,x\in X: Ax=y\Rightarrow x=A_Л^{-1}y$.

$3^0\Rightarrow1^0$: $Ax=y\Rightarrow x=A_Л^{-1}y$ – единственное решение. Теорема доказана.

Теорема. Следующие три утверждения эквивалентны.

1^0. Уравнение $Ax=y$ всегда разрешимо.

2^0. $R(A)=Y$.

3^0. $\exists\, A_П^{-1}$.

Доказательство. $1^0\Rightarrow2^0$: очевидно.

$2^0\Rightarrow3^0$: $\forall\ y\in Y\ \ \exists\, x\in X: Ax=y\Rightarrow\exists\, A_П^{-1}$ (быть может, не единственный).

$3^0\Rightarrow1^0$: $x=A_П^{-1}y\Rightarrow Ax=y$. Теорема доказана.

Аудиофайл: отсутствует

Пример. $X = C^1[0,1]$, $\|x\|_{C^1} = \|x\|_C + \|x'\|_C$, $Y = C[0,1]$, $A = d/dt$.

$\left(A_{\Pi}^{-1}y\right)(t) = \int\limits_0^t y(s)ds$, $\left(A_{\Pi}^{-1}Ax\right)(t) = \int\limits_0^t x'(s)ds = x(t) - x(0) \neq x(t) \Rightarrow A_{\Pi}^{-1}$ не является левым обратным.

§ 3. Обратимые операторы

Определим понятие обратимости.

Определение. $A: X \to Y$ называется обратимым, если уравнение $Ax = y$ однозначно разрешимо для любой правой части и решение устойчиво к изменению правой части (т.е. A^{-1} существует и ограничен).

Теорема. Пусть X – банахово, $A: X \to Y$ – ограниченный оператор, $\exists\, M > 0$: $\|Ax\| \geq M\|x\|$ $\forall x \in X$, $\overline{R(A)} = Y$, тогда A – обратимый оператор.

Доказательство. $\|Ax\| \geq M\|x\| \Rightarrow \ker A = \{0\} \Rightarrow \exists\, A_{Л}^{-1}$. Докажем, что $R(A) = Y$. $\forall\, y \in Y$ $\exists\, y_n \to y$, $y_n \in R(A) \Rightarrow \exists\, x_n \in X$: $Ax_n = y_n$. Эта последовательность фундаментальна: $\|x_n - x_m\| \leq \|y_n - y_m\|/M \Rightarrow \exists\, x \in X : x_n \to x$. Переходя к пределу в равенстве $Ax_n = y_n$, получаем $Ax = y \Rightarrow R(A) = Y \Rightarrow \exists\, A_{\Pi}^{-1} \Rightarrow \exists\, A^{-1}$, причем $\|y\| \geq M\left\|A^{-1}y\right\|$. Теорема доказана.

Теорема. Пусть X – банахово, $A: X \to X$, $\|A\| < 1$, тогда $E - A$ – обратимый оператор.

Доказательство. Пусть $S_n = E + A + A^2 + ... + A^n$. Очевидно, $\|S_n\| \leq 1/(1 - \|A\|)$. Легко видеть, что $\{S_n\}$ фундаментальна. В силу полноты $L(X, X)$ $S_n \to S$. Так как $S_n(E - A) = (E - A)S_n = E - A^{n+1}$, то $S = (E - A)^{-1}$, $\|S\| \leq 1/(1 - \|A\|)$. Теорема доказана.

Следствие. $\left\|(E - A)^{-1}\right\| \leq 1/(1 - \|A\|)$, $\left\|(E - A)^{-1} - E\right\| \leq \|A\|/(1 - \|A\|)$.

Аудиофайл: Z0000197

Справедлив усиленный вариант этой теоремы.

Теорема. Пусть X – банахово, $A: X \to X$ – ограниченный оператор, тогда:

1) существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = R$ (спектральный радиус оператора).

2) если $R < 1$, то $E - A$ – обратимый оператор.

Доказательство. Докажем вначале второе утверждение. По признаку Коши ряд с частичными суммами $S_n = E + A + A^2 + ... + A^n$ сходится; легко видеть, что $S_n \to (E - A)^{-1}$.

Докажем теперь первое утверждение. Так как $0 \leq \sqrt[n]{\|A^n\|} \leq \sqrt[n]{\|A\|^n} = \|A\|$, то существует

$$0 \le R = \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} \le \|A\|.$$

По определению нижнего предела $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ p \in \mathrm{N}:\ \sqrt[p]{\|A^p\|} \le R + \varepsilon$. Произвольное $n \in \mathrm{N}$ можно представить в виде $n = mp + q$, где $0 \le q \le p - 1$. Следовательно,

$$\sqrt[n]{\|A^n\|} = \left\|A^{mp+q}\right\|^{1/(mp+q)} \le \left\|A^p\right\|^{m/(mp+q)} \|A\|^{q/(mp+q)} \underset{m\to\infty}{\to} \left\|A^p\right\|^{1/p} \le R + \varepsilon,$$

откуда следует, что $\sqrt[n]{\|A^n\|} \le R + 2\varepsilon$ начиная с некоторого номера, что и означает, что $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = R$. Теорема доказана.

Теорема. Пусть X – банахово, $A: X \to Y$ – обратимый оператор, $B: X \to Y$, $\|A - B\| < 1/\|A^{-1}\|$, тогда B – обратимый оператор.

Доказательство. $B = A - (A - B) = A\left(E - A^{-1}(A - B)\right)$. Так как $\left\|A^{-1}(A - B)\right\| < 1$, то $E - A^{-1}(A - B)$ обратим $\Rightarrow B^{-1} = \left(E - A^{-1}(A - B)\right)^{-1} A^{-1}$. Теорема доказана.

Следствие. Множество обратимых операторов открыто.

Теорема. Пусть X – банахово, $A: X \to Y$ – обратимый оператор, $A_n : X \to Y$, $\|A_n - A\| \to 0$, тогда $\exists\ N: \forall n > N\ \ A_n$ – обратимый и $\left\|A_n^{-1} - A^{-1}\right\| \to 0$.

Доказательство. Обратимость (начиная с некоторого номера) вытекает из предыдущей теоремы:

$$A_n = A - (A - A_n) = A\left(E - A^{-1}(A - A_n)\right),$$

$$A_n^{-1} = \left(E - A^{-1}(A - A_n)\right)^{-1} A^{-1},$$

$$A_n^{-1} - A^{-1} = \left(E - A^{-1}(A - A_n)\right)^{-1} A^{-1} - A^{-1} = \left(\left(E - A^{-1}(A - A_n)\right)^{-1} - E\right) A^{-1},$$

$$\left\|A_n^{-1} - A^{-1}\right\| \le \frac{\left\|A^{-1}(A - A_n)\right\|}{1 - \left\|A^{-1}(A - A_n)\right\|} \left\|A^{-1}\right\| \to 0.$$

Теорема доказана.

§ 4. Теорема Банаха об обратном операторе

Теорема Банаха. Пусть X, Y – банаховы, $A: X \to Y$ – взаимно-однозначный ограниченный оператор, $D(A) = X$, $R(A) = Y$, тогда A – обратимый оператор (т.е. A^{-1} ограничен).

Лемма. Пусть X – банахово, $B: X \to Y$, $X_n = \{x \in X : \|Bx\| \le n\|x\|\}$, тогда $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ и $\exists\ X_{n_0} \subset X:\ \overline{X_{n_0}} = X$.

Доказательство леммы. Первое утверждение очевидно: $\forall\ x \in X$, $x \ne 0$

$\|Bx\| < \infty \Rightarrow \exists\, n \in \mathrm{N}: \|Bx\| / \|x\| \le n$.

Далее, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{X_n}$ – полное пространство, поэтому по теореме Бэра о категориях $\exists\, n \in \mathrm{N}$: $\overline{X_n}$ содержит некоторый шар $B(\tilde{x}_0, \tilde{r})$. Но тогда $\exists\, x_0 \in X_n$, $r < \tilde{r}$: $\overline{B(x_0, r)} \subset \overline{X_n}$.

Пусть $\|\xi\| = r$. Покажем, что точки этой сферы можно сколь угодно точно аппроксимировать точками из некоторого X_{n_0}. Рассмотрим $x = x_0 + \xi \in \overline{B(x_0, r)}$. Следовательно, $\exists\, x_k \in B(x_0, r) \cap X_n$: $x_k \to x$, так что $\xi_k = x_k - x_0 \to \xi$. Докажем, что оператор B ограничен на последовательности $\{\xi_k\}$. В самом деле, $B\xi_k = Bx_k - Bx_0$,

$$\|B\xi_k\| \le \|Bx_k\| + \|Bx_0\| \le n(\|x_k\| + \|x_0\|) = n(\|x_0 + \xi_k\| + \|x_0\|) \le n(\|\xi_k\| + 2\|x_0\|) = n\left(1 + 2\frac{\|x_0\|}{\|\xi_k\|}\right)\|\xi_k\|.$$

Так как $\|\xi_k\| \ge r/2$, начиная с некоторого номера k, то

$$\|B\xi_k\| \le n\left(1 + \frac{4}{r}\|x_0\|\right)\|\xi_k\| \le n_0\|\xi_k\|,$$

где $n_0 > n(1 + 4\|x_0\|/r)$, что и требовалось доказать.

Теперь покажем, что $\forall\, x \in X$, $x \ne 0$, можно аппроксимировать точками из X_{n_0}. Положим $\xi = rx/\|x\|$, тогда $\|\xi\| = r$, поэтому $\exists\, \{\xi_k\} \in X_{n_0}$: $\xi_k \to \xi$. Соответственно, $x_k = \|x\|\xi_k / r \in X_{n_0}$, $x_k = \|x\|\xi_k / r \to x$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Так как $R(A) = Y$, то существует $A_{П}^{-1}$. В силу взаимной однозначности $\ker A = \{0\}$, поэтому существует и $A_{Л}^{-1}$, а значит, и A^{-1}. Обозначим $B = A^{-1}$, $B: Y \to X$. По лемме $\exists\, Y_{n_0} \subset Y$: $\overline{Y_{n_0}} = Y$.

Рассмотрим $\forall\, y \in Y$, $y \ne 0$, $l = \|y\|$. По лемме $\exists\, y_1 \in Y_{n_0}$: $\|y_1\| \le 2l$, $\|y - y_1\| < l/2$. По лемме $\exists\, y_2 \in Y_{n_0}$: $\|y_2\| \le l$, $\|y - y_1 - y_2\| < l/4$, и т.д.: $y_n \in Y_{n_0}$, $\|y_n\| \le l/2^{n-2}$, $\|y - y_1 - y_2 - ... - y_n\| < l/2^n$. Очевидно, $y_1 + y_2 + ... + y_n + ... = y$.

Положим $x_n = By_n$, тогда $\|x_n\| \le n_0\|y_n\| \le n_0 l/2^{n-2}$, откуда следует, что ряд $x_1 + x_2 + ... + x_n + ...$ сходится. В силу полноты пространства X этот ряд сходится к некоторому $x \in X$, причем $Ax = Ax_1 + Ax_2 + ... + Ax_n + ... = y_1 + y_2 + ... + y_n + ... = y$ и $\|A^{-1}y\| = \|x\| \le \|x_1\| + \|x_2\| + ... + \|x_n\| + ... \le 4n_0 l = 4n_0\|y\|$, т.е. A^{-1} ограничен. Теорема доказана.

Следствие. Пусть в X заданы две нормы $\|\ \|_1$ и $\|\ \|_2$, X полно относительно обеих этих норм и $\exists\, M > 0$: $\|x\|_2 \le M\|x\|_1$ $\forall\, x \in X$, тогда $\exists\, m > 0$: $\|x\|_1 \le m\|x\|_2$ $\forall\, x \in X$.

Достаточно определить $X_k = (X, \|\ \|_k)$, $k = \overline{1, 2}$, $E: X_1 \to X_2$, и воспользоваться только что доказанной теоремой.

Рассмотрим важное понятие замкнутого оператора.

Определение. $A: X \to Y$ называется замкнутым, если $\forall\, x_n \in D(A)$: $x_n \to x$, $Ax_n \to y$ $\Rightarrow x \in D(A)$ и $Ax = y$.

Определение. Множество $\Gamma(A) = \{(x, Ax), x \in D(A)\} \subset X \times Y$ называется графиком оператора $A: X \to Y$.

Легко видеть, что A замкнут $\Leftrightarrow \Gamma(A)$ замкнуто по норме $|x| = \|x\| + \|Ax\|$.

Теорема о замкнутом графике. Пусть X, Y – банаховы, $A: X \to Y$, $D(A) = X$, A – замкнутый оператор, тогда A ограничен.

Доказательство. Определим $X_1 = (X, \|x\|)$, $X_2 = (X, \|x\| + \|Ax\|)$. В силу замкнутости A второе пространство также полное: если $\{x_n\}$ фундаментальна в X_2, то в силу равенства $\|x_n - x_m\|_2 = \|x_n - x_m\| + \|Ax_n - Ax_m\|$ последовательности $\{x_n\}$ и $\{Ax_n\}$ также фундаментальны $\Rightarrow x_n \to x$, $Ax_n \to y$ $\Rightarrow x \in D(A) = X$, $Ax = y$ $\Rightarrow \|x_n - x\|_2 \to 0$. В паре пространств X_1, X_2 справедлива оценка для нормы: $\|x\|_1 \le \|x\|_2$, они оба полные, поэтому по следствию из теоремы Банаха $\exists\, m > 0$: $\|x\|_2 \le m\|x\|_1$, откуда и следует ограниченность A. Теорема доказана.

<u>Аудиофайл: Z0000129</u>

§ 5. Теорема Хана-Банаха

Пусть, как и прежде, X – линейное нормированное пространство.

Теорема Хана-Банаха. Пусть M – линейное многообразие (т.е. подмножество, замкнутое относительно операций сложения элементов и умножения элементов на числа) X, $f(x)$ – линейный ограниченный функционал, заданный на M, тогда существует продолжение функционала $f(x)$ на все X с сохранением нормы, т.е. существует линейный ограниченный функционал $F(x)$, заданный на X: $F(x) = f(x)$, $x \in M$, $\|F\| = \|f\|$.

Доказательство. Докажем для случая сепарабельного пространства (хотя теорема верна и в общем случае).

I. Пусть $x_0 \notin M$. Продолжим функционал с сохранением нормы на многообразие $M + \{x_0\} = \{x \mid x = x' + \alpha x_0, x' \in M, \alpha \in \mathrm{R}\}$. В силу линейности

$$F(x) = F(x') + \alpha F(x_0) = f(x') + \alpha c,$$

где $c = F(x_0)$. Оценим норму. Заметим, что достаточно доказать одностороннюю оценку: если $F(x) \le \|f\|\|x\|$, то $F(-x) \le \|f\|\|-x\| \Rightarrow |F(x)| \le \|f\|\|x\|$.

Итак, докажем неравенство

$$f(x') + \alpha c \le \|f\|\|x' + \alpha x_0\| \quad \forall\, x' \in M,\ \forall\, \alpha \in \mathrm{R}.$$

При $\alpha = 0$ неравенство очевидно. Пусть $\alpha > 0$. Поделим обе части неравенства на α:

$$f\left(\frac{x'}{\alpha}\right)+c\le\|f\|\left\|\frac{x'}{\alpha}+x_0\right\|,$$

$$c\le\|f\|\|x_1+x_0\|-f(x_1)\ \ \forall\, x_1\in M.$$

Пусть теперь $\alpha<0$, тогда поделим на $-\alpha$:

$$f\left(-\frac{x'}{\alpha}\right)-c\le\|f\|\left\|-\frac{x'}{\alpha}-x_0\right\|,$$

$$c\ge f(x_2)-\|f\|\|x_2-x_0\|\ \ \forall\, x_2\in M.$$

Таким образом, достаточно доказать, что

$$f(x_2)-\|f\|\|x_2-x_0\|\le\|f\|\|x_1+x_0\|-f(x_1),$$

$$f(x_1+x_2)\le\|f\|\left(\|x_1+x_0\|+\|x_2-x_0\|\right),$$

но последнее неравенство очевидно вытекает из неравенства треугольника:

$$f(x_1+x_2)\le\|f\|\|x_1+x_2\|=\|f\|\|x_1+x_0+x_2-x_0\|\le\|f\|\left(\|x_1+x_0\|+\|x_2-x_0\|\right).$$

II. Пусть $x_1, x_2, \ldots$ – счетное всюду плотное множество в X. Продолжим функционал с сохранением нормы на $x_1, x_2, \ldots$. Рассмотрим $\forall\, x\in X$. Выберем $x_{n_k}\to x$. В силу ограниченности функционала последовательность $\{F(x_{n_k})\}$ будет фундаментальной; ее предел и определим как $F(x)$. Корректность легко проверяется. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть $x_0\in X$, $x_0\ne 0$, тогда существует линейный ограниченный функционал $f(x)$, заданный на X: $f(x_0)=\|x_0\|$, $\|f\|=1$.

Достаточно определить $f(x)$ на многообразии $L(x_0)$ по правилу $f(x)=\alpha\|x_0\|$, где $x=\alpha x_0$, и затем продолжить его на все пространство по теореме Хана-Банаха.

Следствие 2. Если $f(x_0)=0$ для любого линейного ограниченного функционала f, то $x_0=0$.

Вытекает из следствия 1.

Следствие 3. Пусть M – замкнутое линейное многообразие (т.е. подпространство) X, $M\ne X$, $x_0\in X$, $x_0\notin M$, тогда существует линейный ограниченный функционал $f(x)$, заданный на X: $f(x')=0\ \ \forall\, x'\in M$, $f(x_0)=1$ (биортогональность).

Доказательство. Определим функционал следующим образом: пусть $x=x'+\alpha x_0$, где $x'\in M$, $\alpha\in\mathrm{R}$, тогда $f(x)=f(x'+\alpha x_0)=\alpha$. Ограниченность:

$$\sup_{\substack{x'\in M,\\ \alpha\in\mathrm{R}}}\frac{|f(x'+\alpha x_0)|}{\|x'+\alpha x_0\|}=\sup_{\substack{x'\in M,\\ \alpha\in\mathrm{R}}}\frac{|\alpha|}{\|x'+\alpha x_0\|}=\sup_{\substack{x'\in M,\\ \alpha\in\mathrm{R}}}\frac{1}{\|-x'/\alpha-x_0\|}=\frac{1}{\inf\limits_{x_1\in M}\|x_1-x_0\|}.$$

Так как M замкнуто и $x_0\notin M$, то $\inf\limits_{x_1\in M}\|x_1-x_0\|>0$.

§ 6. Сопряженное пространство

Пусть X – линейное нормированное пространство.

Определение. Пространство линейных ограниченных функционалов над X называется сопряженным к X. Обозначение: X^*.

Итак, $X^* = L(X, \mathrm{R})$.

Замечание. Так как R – полное пространство, то в силу доказанной ранее теоремы X^* – полное.

Теорема. Если X^* сепарабельно, то X также сепарабельно.

Доказательство. Рассмотрим единичную сферу в X^*. По условию теоремы на ней существует счетное всюду плотное множество $\{x_n^*\}$: $x_n^* \in X^*$,

$$\|x_n^*\| = \sup_{\|x\|=1} |x_n^*(x)| = 1 .$$

Но тогда $\exists \{x_n\}$: $x_n \in X$, $\|x_n\| = 1$, $|x_n^*(x_n)| > 1/2$. Рассмотрим множество всевозможных конечных линейных комбинаций элементов $\{x_n\}$ с рациональными коэффициентами. Очевидно, это множество счетно. Замыкание этого множества обозначим через M. Если $M = X$, то все доказано; иначе $\exists\, x_0 \in X$: $x_0 \notin M$. По следствию 3 из теоремы Хана-Банаха $\exists\, f \in X^*$: $f(x') = 0 \ \forall\, x' \in M$, $f(x_0) = 1$ (или $\|f\| = 1$). Но тогда

$$0 = |f(x_n)| = |(f - x_n^*)(x_n) + x_n^*(x_n)| \geq |x_n^*(x_n)| - |(f - x_n^*)(x_n)| > 1/2 - \|f - x_n^*\| .$$

В силу плотности множества $\{x_n^*\}$ член $\|f - x_n^*\|$ можно сделать сколь угодно малым. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Пример. Рассмотрим пространство l_p, $p > 1$, состоящее из бесконечных последовательностей вида $x = (x_1, x_2, \ldots)$, удовлетворяющих условию $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$,

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} .$$

Определим функционал следующим образом: $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$, где $y \in l_q$, $1/p + 1/q = 1$. В силу неравенства Гельдера этот функционал ограничен: $|f(x)| \leq \|x\|_p \|y\|_q$, $\|f\| \leq \|y\|_q$.

Покажем, что всякий функционал из l_p^* представим в таком виде, элемент y определяется однозначно и $\|f\| = \|y\|_q$. Рассмотрим орты $e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ (единица стоит в n-ной позиции). Положим $y_n = f(e_n)$, $x^n = \sum_{k=1}^{n} |y_k|^{q-1} \operatorname{sgn} y_k e_k$. Ясно, что $f(x^n) = \sum_{k=1}^{n} |y_k|^q$. С другой стороны, $|f(x^n)| \leq \|f\| \|x^n\|_{l_p} = \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q \right)^{1/p}$. Следовательно, $\|f\| \geq \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q \right)^{1/q}$. Устремляя n к бесконечности, получим, что $y \in l_q$ и $\|f\| \geq \|y\|_{l_q}$, так что

$\|f\|=\|y\|_{l_q}$. Единственность вытекает из равенства $y_n = f(e_n)$.

Сказанное можно перенести и на пространство $L_p(\mathrm{R}^m, \mu)$, $p>1$: $\forall\ f \in L_p^*(\mathrm{R}^m, \mu)$ $\exists\, y \in L_q(\mathrm{R}^m, \mu)$:

$$f(x)=\int_{\mathrm{R}^m} x(t)y(t)d\mu,\ \|f\|=\|y\|_q.$$

Докажем это. Применим функционал к характеристической функции: $\varphi(A)=f(\chi_A)$. Нетрудно видеть, что это заряд. Следовательно, по теореме Радона-Никодима его можно представить в виде

$$\varphi(A)=\int_A y(t)d\mu,\ y\in L_1(\mathrm{R}^m, \mu).$$

Представив подынтегральную функцию в виде $y(t)=y^+(t)-y^-(t)$, $y^{\pm}(t)\geq 0$, заметим, что достаточно доказать утверждение для случая $y(t)=y^+(t)$. Докажем, что $y\in L_q(\mathrm{R}^m, \mu)$. Аппроксимируем $y(t)$ снизу простыми функциями с конечным числом значений $y_n(t)$: $y(t)\geq y_n(t)\geq 0$. Тогда

$$\varphi(A)=\int_A y(t)d\mu \geq \int_A y_n(t)d\mu .$$

Рассмотрим теперь функцию $x_n(t)$, «устроенную» так же, как $y_n(t)$, но принимающую на соответствующих подмножествах значения y_n^{q-1}. В этом случае

$$f(x_n)=\sum_k y_n^{q-1}\varphi(A_k)\geq \int_{\mathrm{R}^m}\sum_k y_n^q\varphi(A_k)d\mu = \int_{\mathrm{R}^m} y_n^q(t)d\mu .$$

Так как

$$f(x_n)\leq \|f\|\|x_n\|_p = \|f\|\left(\sum_k y_n^{pq-p}\varphi(A_k)\right)^{1/p} = \|f\|\left(\sum_k y_n^q\varphi(A_k)\right)^{1/p},$$

то

$$\int_{\mathrm{R}^m} y_n^q(t)d\mu \leq \|f\|\left(\sum_k y_n^q\varphi(A_k)\right)^{1/p},$$

$$\|y_n\|_q \leq \|f\|.$$

Переходя к пределу, получаем, что $\|y\|_q\leq\|f\|$, так что $\|f\|=\|y\|_q$, что и требовалось доказать.

Покажем, что второе сопряженное к L_1 не совпадает с ним. В самом деле, $L_1^*=L_\infty$, но $L_\infty^*\neq L_1$, поскольку L_1 сепарабельно, а L_∞ – нет: функции

$$x_\alpha(t)=\begin{cases}1,\ 0<t<\alpha,\\ 0,\ \alpha\leq t<1,\end{cases}$$

образуют несчетное множество в $L_\infty(0,1)$ и $\|x_\alpha(t)-x_\beta(t)\|_\infty = 1$ при $\alpha\neq\beta$, поэтому в L_∞ не может существовать счетного всюду плотного множества.

Аудиофайлы: Z0000130, Z0000147, Z0000148

§ 7. Второе сопряженное пространство

Пусть X – линейное нормированное пространство.

Второе сопряженное пространство – это пространство функционалов над пространством функционалов:

$$X^{**} = \left(X^*\right)^*.$$

Покажем, что $X \subset X^{**}$. А именно, покажем, что всякий элемент $x \in X$ определяет некоторый ограниченный линейный функционал на X^{**}. В самом деле, положим

$$\tau_x\left(x^*\right) = x^*(x)$$

для всякого линейного ограниченного функционала $x^* \in X^*$. Тогда

$$\tau_x\left(\alpha x^* + \beta y^*\right) = \left(\alpha x^* + \beta y^*\right)(x) = \alpha x^*(x) + \beta y^*(x) = \alpha\tau_x\left(x^*\right) + \beta\tau_x\left(y^*\right) \;\; \forall\, x^*, y^* \in X^*,$$

т.е. функционал τ_x линеен. Далее, $\left|\tau_x\left(x^*\right)\right| = \left|x^*(x)\right| \le \left\|x^*\right\|\|x\|$, поэтому $\|\tau_x\| \le \|x\|$.

Лемма. $\|\tau_x\| = \|x\|$.

Доказательство. Если $x = 0$, то $\tau_x \equiv 0$, и все доказано. Если $x \ne 0$, то по следствию 1 из теоремы Хана-Банаха существует $f \in X^*$: $f(x) = \|x\|$, $\|f\| = 1$. Но тогда $\tau_x(f) = f(x) = \|x\| = \|x\|\|f\|$, т.е. $\|\tau_x\| \ge \|x\|$, откуда и следует искомое равенство. Лемма доказана.

Определение. Если X^{**} состоит только из таких функционалов τ_x (т.е. X^{**} изоморфно X), то X называется рефлексивным.

Пример. L_p рефлексивно при $p > 1$ и нерефлексивно при $p = 1$: $L_1^* = L_\infty$ – несепарабельное пространство, и предположение о рефлексивности противоречит доказанной выше теореме о том, что если X^* сепарабельно, то X также сепарабельно.

l_p рефлексивно при $p > 1$.

§ 8. Слабая сходимость. Слабая компактность

Пусть X – банахово пространство.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in X$, называется слабо сходящейся к элементу $x \in X$, если $x^*(x_n) \to x^*(x)$ $\forall\, x^* \in X^*$.

Обозначение: $x_n \xrightarrow{w} x$.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in X$, называется слабо фундаментальной, если последовательность $\{x^*(x_n)\}$ фундаментальна $\forall\, x^* \in X^*$.

Утверждение. Из сходимости по норме вытекает слабая сходимость.

В самом деле, если $\|x_n - x\| \to 0$, то $|x^*(x_n) - x^*(x)| = |x^*(x_n - x)| \le \|x^*\| \|x_n - x\| \to 0$.

Замечание. Обратное неверно: $X = l_2$, $x_n = e_n$ (орты): $e_n \xrightarrow{w} 0$ (в силу теоремы Рисса и равенства Парсеваля), $e_n \not\to 0$.

Лемма. Слабый предел единственен.

Достаточно заметить, что если $x_n \xrightarrow{w} x$ и $x_n \xrightarrow{w} \tilde{x}$, то $x^*(x - \tilde{x}) = 0 \;\; \forall\, x^* \in X^*$, и в силу следствия 2 из теоремы Хана-Банаха $x - \tilde{x} = 0$.

Докажем теперь три основных теоремы о слабой сходимости.

Теорема 1. Слабо фундаментальная последовательность ограничена.

Доказательство. Пусть дана последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in X$, и последовательность $\{x^*(x_n)\}$ фундаментальна $\forall\, x^* \in X^*$, тогда $\forall\, x^* \in X^* \;\; \exists \lim\limits_{n\to\infty} x^*(x_n)$. Представим в виде $x^*(x_n) = \tau_{x_n}(x^*)$. Последовательность функционалов $\{\tau_{x_n}\}$ будем рассматривать как последовательность операторов, действующих из X^* в R. Так как $\exists \lim\limits_{n\to\infty} |\tau_{x_n}(x^*)|$ и X^* полное, то по следствию из теоремы Банаха-Штейнгауза $\exists\, M$: $\|\tau_{x_n}\| = \|x_n\| \le M$, что и требовалось доказать.

Теорема 2. Рефлексивное пространство слабо полно.

Доказательство. Пусть дана последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in X$, и последовательность $\{x^*(x_n)\}$ фундаментальна $\forall\, x^* \in X^*$, тогда $\forall\, x^* \in X^* \;\; \exists \lim\limits_{n\to\infty} x^*(x_n) = f(x^*)$. Очевидно, f – линейный функционал. Докажем его ограниченность. В самом деле, если $x^*(x_n) = \tau_{x_n}(x^*)$, то по теореме 1 $\exists\, M$: $\|\tau_{x_n}\| \le M$, поэтому $|f(x^*)| = \left| \lim\limits_{n\to\infty} \tau_{x_n}(x^*) \right| \le M \|x^*\|$. Следовательно, $f \in X^{**}$. В силу рефлексивности пространства $\exists\, x \in X$: $f(x^*) = \tau_x(x^*) = x^*(x)$, т.е. $x_n \xrightarrow{w} x$, что и требовалось доказать.

Теорема 3 (о слабой компактности). В сепарабельном рефлексивном пространстве из любой ограниченной последовательности можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Пусть $X = X^{**}$, $x_n \in X$, $\|x_n\| \le M$.

Прежде всего, отметим, что X^* сепарабельно в силу сепарабельности $(X^*)^* = X^{**} = X$. Пусть $\{x_k^*\}$ – счетное всюду плотное множество в X^*.

Рассмотрим x_1^*. Так как $|x_1^*(x_n)| \le \|x_1^*\| \|x_n\| \le M \|x_1^*\|$, то числовая последовательность $\{x_1^*(x_n)\}$ ограничена, поэтому из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{x_1^*(x_{1n})\}$.

Далее, рассмотрим $\{x_2^*(x_{1n})\}$. Аналогично, из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{x_2^*(x_{2n})\}$, и т.д.

Возьмем теперь диагональную подпоследовательность $\{x_{nn}\}$ и докажем, что она слабо сходящаяся. В самом деле, обозначим $z_n = x_{nn}$, тогда $\forall\ k$ числовая последовательность $\{x_k^*(z_n)\}$ сходится. Зафиксируем $\forall\ \varepsilon > 0$ и $\forall\ x^* \in X^*$. Найдем $k: \left\|x_k^* - x^*\right\| < \varepsilon$, тогда

$$\left|x^*(z_m) - x^*(z_n)\right| = \left|x^*(z_m - z_n)\right| = \left|(x^* - x_k^*)(z_m - z_n) + x_k^*(z_m - z_n)\right| \le$$

$$\le \left\|x^* - x_k^*\right\|\left\|z_m - z_n\right\| + \left|x_k^*(z_m) - x_k^*(z_n)\right|.$$

Но первое слагаемое в правой части этого неравенства допускает оценку

$$\left\|x^* - x_k^*\right\|\left\|z_m - z_n\right\| \le \left\|x^* - x_k^*\right\|\left(\left\|z_m\right\| + \left\|z_n\right\|\right) < \varepsilon 2M,$$

а второе стремится к нулю, поэтому $\{x_{nn}\}$ слабо фундаментальна. По теореме 2 она слабо сходится. Теорема доказана.